«Нулевой» вариант контрольной работы №2

1. Формула Тейлора. Некоторые возможные варианты:

– с помощью формулы Тейлора найдите рациональное приближение числа $\sqrt{e}$ с точностью 0.001 (сделайте оценку погрешности);

– с помощью формулы Тейлора найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x^3+\cos(2x^2)-1}{x^3\left(\log_2(x^5+2)-1\right)}$;

– представьте формулой Тейлора функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с $o\left((x-x_0)^6\right)$ и укажите $f^{(6)}(x_0)$:

а) $f(x)=x^2\sin\pi x$, $x_0=1$;

б) $f(x)=\ln(x-2x^2+6)$, $x_0=1$;

– представьте формулой Тейлора функцию $f(x)=\sin(\pi x^2)$ в окрестности точки $x_0=1$ с многочленом Тейлора 4-го порядка и остаточным членом в форме Лагранжа.

2. ФМП: область определения, множество значений, линии уровня. Некоторые возможные варианты:

– укажите на плоскости xOy область определения функции $z=\arccos\left(\dfrac{y+x^2}{y-x}\right)$; является ли это множество открытым или замкнутым, ограниченным, выпуклым, линейно связным? (или нарисуйте линию c-уровня этой функции для $c=0$, $c=1$);

– найдите множество значений функции $z=2^{-x^2+4xy-5y^2+4y-2x}$;

– найдите множество значений функции $z=2x+3y-1$, определенной на множестве $D=\{(x,y):3x+4y\le 18, 5x+4y\le 23, x\ge 1, y\ge 2\}$;

– найдите наибольший доход от выпуска двух наименований продукции x и y, если доход от реализации единиц продукций равен 2 и 3 ед. соответственно, а ресурсные ограничения имеют вид: $3x+4y\le 12$, $4x+7y\le 18$, $x\ge 0, y\ge 0$. Является ли ресурсное множество: а) открытым; б) замкнутым; в) выпуклым; г) ограниченным?

3. ФМП: дифференциал 1-го порядка, производная по направлению и градиент, касательная плоскость. Некоторые возможные варианты:

– запишите уравнение касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности, заданной функцией $z=\dfrac{5x-y}{2x+y}$ в точке $(2,-3)$ (или, например, в точке ее пересечения с прямой $2x+y=3$, $3x-y=2$ и т. д.);

– найдите производную функции $u=\dfrac{5x-y+z}{2x+y-2z}$ в точке $M_0(2,-3,1)$ по направлению вектора $\overrightarrow{M_0M}$, если $M(3,2,0)$ (или вектора $\operatorname{grad}u\big|_{M_0}$, или $\operatorname{grad}u\big|_{M_0}+\overrightarrow{M_0M}$, или «по направлению наибольшего возрастания (убывания) функции u в точке M_0» и т.д.);

– запишите уравнение касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности уровня $u(x,y,z)=u(2,-3,1)$ в точке $M_0(2,-3,1)$, если $u=\dfrac{5x-y+z}{2x+y-2z}$;

– найдите, в какой пропорции надо увеличить затраты на труд (x) и капитал (y), чтобы рост выпуска продукции был наибольшим, если производственная функция равна $f(x,y)=2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$, а текущие затраты на труд и капитал равны по 1 у.е.;

– пусть $f(x,y)=2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ – производственная функция двух факторов и $x=y=1$ – текущие значения этих факторов. Предположим, что фактор x увеличился на 10%. Найдите примерно с помощью дифференциала, на сколько процентов должен измениться фактор y, чтобы производственная функция не изменилась;

– факторы производства x и y линейно зависят от времени: $x=1+\alpha t$ и $y=1+\beta t$, $\alpha^2+\beta^2=1$. Выпуск продукции описывается производственной функцией $f(x,y)=2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$. Найдите такие α и β, при которых темп роста выпуска продукции в начальный момент времени $t=0$ будет равен $\frac{2}{3}$;

– найдите приближенно с помощью дифференциала необходимое изменения факторов производства x и y производственной функции $f(x,y)=2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ в точке $x=y=1$, чтобы прирост выпуск продукции составил 40% от текущего значения при условии, что суммарное изменение факторов равно $\Delta x+\Delta y=1$;

– найдите точно (методом выделения полных квадратов) и приближенно точку локального минимума функции $u=x^2+4xy+5y^2+2x+5$, сделав три шага методом градиентного спуска из точки $\mathbf{x}^{(0)}=(0,0)$ с шагом $h_k=\dfrac{1}{k+4}$.

4. Дифференцируемость ФМП, производные и дифференциалы высших порядков. Некоторые возможные варианты:

– исследуйте на непрерывность и дифференцируемость функцию

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+2xy^2}{x^2+y^2}, & \text{если } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{если } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ в точке $(0,0)$;

– найдите $f''_{xy}(0,0)$ и $f''_{yx}(0,0)$, где

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$ если они существуют;

– $d^3f(2,3)$ для функции $f(x,y)=2x^2y^3+3xy^4$;

– $d^2f(1,2,3)$ для функции $f(x,y,z)=\ln\left(\dfrac{2x+y-z}{x-y+z}\right)$;

– $d^{10}f(1,-1)$ для функции $f(x,y)=x^3\cos\pi y$.

5. Представьте формулой Тейлора (некоторые возможные варианты):

– функцию $f(x,y)=\sin\pi(x+y)$ в окрестности точки $(2,-1)$ с многочленом Тейлора второго порядка и остаточным членом в форме Пеано, и с многочленом Тейлора первого порядка и остаточным членом в форме Лагранжа;

– функцию $f(x,y)=y^3\sin\pi x$ в окрестности точки $(1,-1)$ с $o\left(\left((x-1)^2+(y+1)^2\right)^2\right)$ и укажите $d^4 f(1,-1)$.