«Нулевой» вариант экзаменационной работы, осенний семестр

1. Найдите предел. Примерные варианты:
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{6-x^2}}{\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{1-3x^2}}$; $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sin^2 2x-\cos^2 3x}{\cos^2 x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}-\sqrt[4]{x+14}}{\log_2(6x+4)-2^x}$; $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\mathrm{tg}^2 x}$.

2. Дана функция $y=x+\dfrac{|x+2|+x}{x^2+4x+3}$. Найдите:
   а) все асимптоты графика функции;
   б) все точки разрыва и укажите их характер. Постройте эскиз графика функции.

3. Варианты:
   – сформулируйте теорему о разложении функции одной переменной по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа; запишите формулу Тейлора для функции $y=(x^2+2x)\sin^2(\pi x/2)$ в окрестности точки $x_0=-1$ с $o\left((x+1)^7\right)$; чему равно $y^{(6)}(-1)$?
   – найдите: а) $\left.\left(\dfrac{x^4}{x^2+2x-3}\right)^{(20)}\right|_{x=2}$; б) $\left.\left((x^3+2x)\sin\pi x\right)^{(20)}\right|_{x=1}$.

4. Варианты:
   – выпуск продукции описывается производственной функцией $f(x,y)=2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ и зависит от двух факторов производства x, y, текущие значения которых $x=y=1$.
   Найдите с помощью дифференциала приближенно:
     а) на сколько процентов изменится выпуск продукции, если первый фактор увеличить на 10%, а второй – уменьшить на 10%;
     б) в каком отношении надо изменять факторы производства, чтобы выпуск продукции рос с наибольшим темпом?
     в) на сколько процентов примерно надо изменить первый фактор, чтобы при увеличении второго фактора на 10% выпуск продукции не изменился;
     г) в каком отношении $t=\Delta y/\Delta x$ надо изменять факторы производства, чтобы выпуск продукции начал расти со скоростью $\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{1}{3}$?
     е) темп выпуска продукции (скорость изменения выпуска), если факторы производства линейно зависят от времени: $x=1+2t$ и $y=1+3t$.

   – выпуск продукции описывается производственной функцией $u(x,y)$, заданной неявно уравнением $\dfrac{2\sqrt{u}}{x^2}+\dfrac{\sqrt[3]{u}}{y^2}=3$. В каком отношении надо увеличивать производственные факторы x и y из точки $x=y=1$, чтобы рост выпуска продукции был наибольшим?

5. Варианты:
   – Сформулируйте теорему о локальной обратимости отображения. Дано отображение $\mathbf{f}:(x,y,z)\mapsto(u,v,w)$, $u=xy+yz$, $v=yz+xz$, $w=xyz$. Определите: а) является ли это отображение локально обратимым в окрестности точки $(x,y,z)=(1,1,1)$? Если отображение $\mathbf{f}$ локально обратимо в окрестности точки $(x,y,z)=(1,1,1)$, то найдите:

б) матрицу Якоби обратного отображения в точке $\mathbf{f}(1,1,1)$; в) разложение обратного отображения по формуле Тейлора 1-го порядка в окрестности точки $\mathbf{f}(1,1,1)$.

– Сформулируйте теорему о существовании неявного отображения. Установите, определяет ли система $\begin{cases} 3xy^2u^3 + 2yuv + xv^2 = 6v^3, \\ 2xu - 5yv^3 + 4u^3v = 1 \end{cases}$ неявные функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ в окрестности точки $(x,y,u,v) = (1,1,1,1)$? Если да, то найдите: а) матрицу Якоби $J(u,v) = \dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}$ отображения (u,v) в точке $(1,1)$; б) разложение по формуле Тейлора первого порядка отображения (u,v) в точке $(1,1)$ с остаточным членом в форме Пеано.

– Установите, задает ли уравнение $u^3 + ux = 8y$ неявную функцию $u(x,y)$ в окрестности точки $(x_0,y_0,u_0) = (0,1,2)$? Если да, то найдите разложение функции $u(x,y)$ по формуле Тейлора второго порядка в точке $(0,1)$ с остаточным членом в форме Пеано.

– Найдите приближенное решение системы $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0, \\ x^2 + 2y^2 - 6y = 0, \end{cases}$ сделав два шага модифицированным методом Ньютона, взяв в качестве «нулевого» решения точку $(1,0)$.

6. Варианты:

– сформулируйте необходимые и достаточные условия экстремума ФМП, исследуйте на экстремум функцию $f = 2y + 2z + e^{x^2} + x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xy + 2yz$;

– найдите точно и приближенно точку локального экстремума функции $u = x^2 + 4xy + 5y^2 + 2x + 5$, сделав три шага методом градиентного спуска из точки $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0)$ с шагом $h_k = \dfrac{1}{k+4}$;

– найдите точно все и приближенно одну стационарную точку функции $z = x^3 + y^3 + 3xy$ модифицированным методом Ньютона, сделав три шага из точки $(1,0)$;

– найдите все экстремальные значения функций $z(x,y)$, заданных неявно уравнением $z^4 + 2xz + x^2 + y^2 = 0$;

– пусть заданы пять точек $\{(x_k, y_k)\}_{k=1}^5$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, где

x_k	-2	-1	0	1	3
y_k	-4	-2	-1	2	4

.

Найдите функцию $y = ax + b$, минимизирующую критерий $\sum_{k=1}^5 (ax_k + b - y_k)^2$ (метод наименьших квадратов);

– сформулируйте необходимые и достаточные условия выпуклости ФМП, установите характер выпуклости функций:

а) $u = x^2 - 4xyz + 5y^3 + 6z^2$ в окрестности точки $(1,1,-1)$;

б) $u(x,y)$ в окрестности точки $(0,0)$, если функция $u(x,y)$ задана неявно уравнением $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 4xu + 4u^2 = 1$ и условием $u(0,0) = 1/2$;

– на плоскости xOy укажите множество выпуклости функции $u = x^3 + y^3 - 3xy$;

– будет ли функция $u(x, y) = e^{x^2-4y^2}$ выпуклой в $\mathbb{R}^2$?

Основные формулировки:

1. Определение предела последовательности и функции одной и многих переменных.
2. Определение непрерывности функции одной и многих переменных, классификация точек разрыва.
3. Свойства функций, непрерывных на компактном множестве (с определением компактности).
4. Определение производной функции одной переменной, частной производной ФМП, производной по направлению, определение дифференцируемой функции одной переменной и ФПМ.
5. Свойства градиента ФМП.
6. Формулировка теорем о разложении функций одной и многих переменных по формуле Тейлора с остаточными членами в форме Пеано и Лагранжа.
7. Определение точки экстремума, необходимые и достаточные условия существования экстремума дифференцируемой функции одной и многих переменных.
8. Определение выпуклой ФМП. Необходимые и достаточные условия выпуклости.
9. Теорема о существовании неявной функции и отображения.
10. Теорема о локальной обратимости отображения.
11. Определение и свойства выпуклых функций.