A1. Найдите какую-либо стационарную точку функции f и исследуйте эту точку на экстремум:

а) $f=(x^2+y^2+4z^2+3x)e^z$; б) $f=xyz+x^2+2y^2+z^2+2x$.

Найдите приближенно стационарную точку функции f, сделав один шаг методом Ньютона из точки $(1,1,1)$.

A2. Функцию $z=x^4+y^4-2xy$: а) исследуйте на экстремум; б) найдите приближение к одной из стационарных точек этой функции модифицированным методом Ньютона, сделав два шага из точки $(1,0)$.

A3. Исследуйте на экстремум функцию: а) $f=xyz\cdot e^{-x-2y-3z}$ ($x>0$, $y>0$, $z>0$); б) $f=4xz-x^2-6y^2-21z^4-4yz$.

A4. Найдите все экстремальные значения функций $z(x,y)$, заданных неявно уравнением:

а) $z^4+8z-4xy+4x^2+2y^2-4x+2=0$; б) $\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}=x^2+y^2-z^2+\dfrac{5}{4}z$; в) $y^2z+x+e^{x^2z}=0$;

г) $e^z=x^2+y^2-z+1$; д) $(4x^2+y^2)e^z+z=1$.

A5. Исследуйте функцию $u=x^4+4xy+256y^4$ на экстремум. Найдите приближенно точку локального экстремума этой функции (если она есть), сделав одну итерацию методом градиентного спуска из точки $(x_0,y_0)=(1,0)$ с шагом $h_k=4^{-k-2}$.

B1. На плоскости $\mathbb{R}^2$ заданы точки $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^4$, где

x_k	−2	−1	1	4
y_k	3	2	0	−4

. Найдите стационарную точку функции $F(a,b)=\sum_{k=1}^4(ax_k+b-y_k)^2$. Будет ли она точкой локального минимума? Будет ли она точкой глобального минимума?

B2. В $\mathbb{R}^3$ заданы четыре точки $\{(x_k,y_k,z_k)\}_{k=1}^4$, где

x_k	−3	−1	1	3
y_k	−2	0	1	2
z_k	−8	0	7	16

. Найдите линейную функцию $z=ax+by+c$, минимизирующую критерий $\sum_{k=1}^4(ax_k+by_k+c-z_k)^2$.

B3. Пусть заданы пять точек $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^5$ на плоскости $\mathbb{R}^2$, где

x_k	−2	−1	0	1	2
y_k	−1	1	3	4	2

. Найдите функцию $y=ax^2+bx+c$, минимизирующую критерий $\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^5(ax_k^2+bx_k+c-y_k)^2$.

B4. Даны три точки $\{(x_k,y_k)\}_{k=1}^3$, где

x_k	−1	0	1
y_k	2	3	5

. Найдите функцию вида $y=a+b\cdot 2^x$, минимизирующую критерий $\sum_{k=1}^3\left(a+b\cdot 2^{x_k}-y_k\right)^2$.

C1. Функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ определяются неявно системой уравнений $\begin{cases}xu^2+2yv^2=7,\\ 3xuv+yv^2=-2,\end{cases}$ причем $u(-1,1)=1$, $v(-1,1)=2$. Найдите $u'_x(-1,1)$ и $v'_x(-1,1)$.

C2. Определяет ли система $\begin{cases}x^2yu^3-yuv+xv^2=v^3,\\ xv+yv^2+3u^3v=4\end{cases}$ неявные функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ в окрестности точки $x=1$, $y=0$, $u(1,0)=1$, $v(1,0)=1$. Если – да, то найдите разложение по формуле Тейлора первого порядка с остатком в форме Пеано функции $u=u(x,y)$ в точке $(1,0)$.

C3. Определяет ли уравнение $u^3-4u^2x=27y^2$ неявную функцию $u=u(x,y)$ в окрестности точки $(x_0,y_0,u_0)=(0,1,3)$? Если да, то найдите разложение функции $u(x,y)$ по формуле Тейлора второго порядка в точке $(0,1)$ с остаточным членом в форме Пеано.

D1. Найдите приближенно решение системы $\begin{cases}3x^2+y^2-4xy+1=0,\\ x^2-4y^2+5x-8y=0,\end{cases}$ сделав два шага модифицированным методом Ньютона, взяв в качестве «нулевого» решения точку $(0,-1)$ (на каждом шаге можно округлять все вычисления до 0.1).

D2. Найдите приближенно решение системы $\begin{cases} x^2+2yz-4xyz+z^2=0, \\ 2xz-y^2z+3xyz-8=0, \\ yz-2yz^2+xz+x^2y=0, \end{cases}$ сделав один шаг методом Ньютона, взяв в качестве «нулевого» решения точку $(1,1,1)$.

D3. Найдите приближенное решение системы $\begin{cases} x^2-2y^2+2xy+2=0, \\ 2x^2+y^2-xy-8=0, \end{cases}$ сделав два шага модифицированным методом Ньютона, взяв в качестве «нулевого» решения точку $(1,1)$ (на каждом шаге можно округлять все вычисления до 0.1).

D4. Найдите приближенно решение системы $\begin{cases} x^2+2yz-xz+3=0, \\ xz-xy-3yz=0, \\ 2y+3xy+z^2+z=0, \end{cases}$ сделав два шага модифицированным методом Ньютона, взяв в качестве «нулевого» решения точку $(1,0,0)$.

E1. Запишите формулу Тейлора для функции $f(x,y,z)=\dfrac{xyz}{x+2y+3z}$ в окрестности точки $M_0(1,1,1)$ с многочленом Тейлора 1-го порядка и с остатком в форме Пеано. Найдите производную функции f по направлению прямой $2x-3=y+1=4z$ в точке M_0 (в сторону возрастания функции).

E2. Запишите формулу Тейлора для производственной функции $f(x,y,z)=\sqrt{xy+2yz}$ в окрестности точки $M_0(2,1,1)$ с многочленом Тейлора 1-го порядка и с остатком в форме Пеано. В каком отношении надо увеличивать производственные факторы x,y,z, чтобы выпуск продукции рос с наибольшим темпом из точки M_0?

F1. Установите характер выпуклости функции $u=3x^4+2x^2y^2-4xz+5y^4+2z^2$ в окрестности точки $(1,-1,2)$. Будет ли эта точка точкой экстремума функции u?

F2. Установите характер выпуклости функции $u(x,y)$ в окрестности точки $(2,1)$, если $u(x,y)$ задана неявно уравнением $32x^2-24xy+12y^2+u^2-2xu+6yu-34x+6y=33$ и условием $u(2,1)=1$.

F3. Установите характер выпуклости функции $u(x,y)$ в окрестности точки $(1,0)$, если $u(x,y)$ задана неявно уравнением $21x^2-12xy+3y^2+2yu+u^2-54x+16y+32=0$ и условием $u(1,0)=1$.

F4. На плоскости xOy укажите множества точек, где функция $f=2x^2y+3xy+x^2+y^2$ выпукла.

F5. На плоскости xOy укажите множество строгой выпуклости функции $u=x^2y^2+xy-x+2y$.

G1. Является ли отображение $\mathbf{f}:\begin{cases} u=xe^y+2ye^x, \\ v=x^2e^y+4y^2e^x \end{cases}$ локально обратимым в окрестности точки $(x,y)=(1,1)$? Если – да, то найдите разложение обратного отображения $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ по формуле Тейлора 1-го порядка с остатком в форме Пеано в окрестности точки $\mathbf{f}(1,1)$.

G2. Докажите, что отображение $f:(x,y,z)\mapsto(u,v,w)$, $u=xy+3yz$, $v=yz-4xz$, $w=2yz+5z$ является локально обратимым в окрестности точки $(x,y,z)=(1,0,-1)$ и найдите матрицу Якоби обратного отображения в точке $f(1,0,-1)$.

G3. Проверьте, определяется ли неявное отображение (u,v), $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ системой уравнений $\begin{cases} xu^2v+2yv^2=3, \\ 3x^2v+5yv^2=13 \end{cases}$ в окрестности точки $(x,y,u,v)=(-1,2,1,1)$. Если – да, то найдите разложение по формуле Тейлора первого порядка отображения (u,v) в точке $(x,y)=(-1,2)$.

G4. Дано отображение $\mathbf{f}:(x,y,z)\mapsto(u,v,w)$, $u=x^2y+3xyz^2$, $v=2x+yz-xz$, $w=xy-3z$. а) является ли это отображение локально обратимым в окрестности точки $(x,y,z)=(-1,1,2)$? б) если – да, то найдите разложение обратного отображения по формуле Тейлора 1-го порядка в окрестности точки $\mathbf{f}(-1,1,2)$.