

«Нулевой» вариант контрольной работы №1

1. Задания на нахождение пределов, не применяя правило Лопиталья. Примеры пределов:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{6 - x^2}}{\sqrt[3]{x^2 + 1} + \sqrt[3]{1 - 3x^2}}$; б) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin^2 2x - \cos^2 3x}{\cos^2 x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 4} - \sqrt[4]{x + 14}}{\log_2(6x + 4) - 2^x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

2. Задание на исследование бесконечно малых, бесконечно больших, анализ эквивалентности функций и т.п. Примеры заданий:

– является ли функция $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x^2 + 4\sqrt{2x^9 + 1}} \cdot \sqrt[5]{4x^6 + 1}}{\sqrt[4]{3x^8 + 1} - \sqrt[5]{2x^9 + 3}}$ бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$?

– найдите все значения α и β , при которых функция $f(x) = \sqrt{x^2 + x} + \alpha x + \beta$ будет бесконечно малой при $x \rightarrow +\infty$;

– найдите значения α и β , при которых функция $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3x} - 2x}{2^{x^2} - 2}$ будет эквивалентна функции $g(x) = \alpha(x - 1)^\beta$ при $x \rightarrow 1 + 0$;

3. Задание на нахождение асимптот графика функции и построение его эскиза. Напри-

мер: найдите все асимптоты графика функции $y = \frac{x(|x + 2| - x)}{x + 3}$ и постройте его эскиз.

4. Задание на исследование функции на непрерывность и построение эскиза графика.

Например: исследуйте на непрерывность функцию (найдите все точки разрыва и ука-

жите их характер) $y = \begin{cases} \frac{2|x + 1|}{x^2 + 3x + 2}, & x < 0, \\ \cos(\pi x), & 0 < x \leq 1, \text{ и постройте эскиз её графика.} \\ 2^{\frac{1}{1-x}} - 1, & x > 1 \end{cases}$

5. Задание на исследование функции на дифференцируемость, вычисление производных и приложения. Примеры заданий:

– найдите значения α и β , при которых функция $y = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & x < 1, \\ \alpha x^2 + \beta x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ будет дифференцируемой;

– найдите касательные (нормали) к графику функции: а) $y = (x^2 + 1)^{\frac{x-2}{x+1}}$ в точках пересечения этого графика с прямой $y = 1$; б) $\begin{cases} x = te^{t^2}, \\ y = te^{2t} \end{cases}$ в точке $(x_0, y_0) = (e, e^2)$;

– найдите, в каких точках и под каким углом пересекаются графики функций

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \text{ и } g(x) = \frac{x^2}{x + 1};$$

- найдите односторонние касательные к графику функции $y = x^2 |x + 2|$ в точках его пересечения с осью Ox и постройте эскиз графика;
- найдите: а) $(\sin^2 3x)^{(10)}$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$; б) $\left(\frac{x^4 + 1}{x^2 - 1}\right)^{(10)}$ в точке $x = 0$; в) $((2x^2 + 3x) \sin 2x)^{(10)}$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$.