ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ

$$\int \sin mx \cos nx dx = 0.5\int (\sin(m-n)x + \sin(m+n)x)dx$$
$$\int \sin mx \sin nx dx = 0.5\int (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)dx$$
$$\int \cos mx \cos nx dx = 0.5\int (\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)dx$$

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

$m,n = 2k+1$	$m,n = 2k$	$m+n = -2k$
$\int \sin^m x\cos^n x dx =$ $\int \sin^{2k} x\cos^n x \sin x dx =$ $-\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x) =$ $\lvert\cos x = t\rvert = \int (1-t^2)^k t^n dt$	$\sin^2 x = 0.5(1-\cos 2x)$ $\cos^2 x = 0.5(1+\cos 2x)$	$tgx = t; \sin x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}};$ $\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}; dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$

ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

универсальная тригонометрическая подстановка

$$tg(x/2) = t \ (-\pi < x < \pi)$$
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int R(\sin x, \cos x)dx$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ $\cos x = t$	$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ $tgx = t$	$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ $\sin x = t$

ТАБЛИЧНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ:

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C \qquad \int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C \qquad \int \cos u du = \sin u + C$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C \qquad \int ctgu du = \ln|\sin u| + C \qquad \int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C \qquad \int tgu du = -\ln|\cos u| + C \qquad \int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$$

ИНТЕГРАЛЫ ОТ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right)dx$$

$\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^s$, $s -$ общий знаменатель дробей $\dfrac{m_1}{n_1}, \ldots, \dfrac{m_k}{n_k}$

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ БИНОМ

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx$$

если $p \in \mathbb{Z}$, то $x = t^s$, где $s -$ общий знаменатель дробей m и n	если $\dfrac{\mathrm{m+1}}{\mathrm{n}} \in \mathbb{Z}$, то $a + bx^n = t^s$, где $s -$ знаменатель дроби p	если $\dfrac{\mathrm{m+1}}{\mathrm{n}} + p \in \mathbb{Z}$, то $ax^{-n} + b = t^s$, где $s -$ знаменатель дроби p

КВАДРАТИЧНАЯ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬ

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

1. Выделяем полный квадрат в квадратном трехчлене $ax^2+bx+c = |a|\left[\pm(x+\alpha)^2 \pm \mu^2\ \right]$.
2. Делаем замену $x + \alpha = t$.
3. Получим один из следующих интегралов

$\int R_1(t, \sqrt{\mu^2 - t^2})dt$	$t = \mu \sin z$, $\mu^2 - t^2 = \mu^2 \cos^2 z$	$\int R_2(\sin z, \cos z)dz$
$\int R_1(t, \sqrt{t^2 - \mu^2})dt$	$t = \mu / \cos z$, $t^2 - \mu^2 = \mu^2 tg^2 z$	$\int R_2(\sin z, \cos z)dz$
$\int R_1(t, \sqrt{\mu^2 + t^2})dt$	$t = \mu tgz$, $t^2 + \mu^2 = \mu^2 / \cos^2 z$	$\int R_2(\sin z, \cos z)dz$

Подстановки Эйлера

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x \pm t$, если $a > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$, если $c > 0$	$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm(x - x_1)t$, если $x_1 -$ корень