

Примеры задач контрольной работы №3

1. Задача на условный экстремум. Например:

- исследуйте функцию $u = xy + 2x + 2y + z^2$ на экстремум при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 2$;
- найдите какую-нибудь критическую точку функции $u = x + y + 3z$ при условиях $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $xyz = 4$, исследуйте её характер.

или задача на условный экстремум с параметрами. Например:

- найдите $F'(1)$, если $F(a)$ есть минимальное значение функции $z = x^2 + (y - a)^2$ при условии $a^3x + \frac{y}{a} = 3a$; запишите разложение функции $F(a)$ по формуле Тейлора с остаточным членом $o(a - 1)$.
- в задаче максимизации дохода $f = 3x + 4y + 5z$ при ресурсных ограничениях $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 5, \\ 5y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ найдите приближенное процентное изменение максимального дохода, если запасы ресурсов (правые части ограничений) увеличились на 5% и 8% соответственно.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции f в замкнутой области

D . Например:

- $f = x + 9y$, $D: x^2 + 2xy + 9y^2 \leq 20$;
- $f = x^2 + 2xy + 3y^2 - 2x$, $D: y \leq 1, x \geq 2, 2y + 6 \geq x$;
- $f = x + 2y - 5z$, $D: y \geq 0, -1 \leq x \leq 5, z \geq 1, 2x + 4y + 5z \leq 20$;
- $f = 4x + 2y + z$ на множестве $D: 2x + 4y \leq z \leq 11 - x^2 - y^2$.

3. Интегрирование по частям, рациональных функций, тригонометрических или иррациональных функций. Например,

- $\int \frac{3\ln^2(5x+1) - 2x}{5x+1} dx$;
- $\int_1^e (2x+3)\ln^2 x dx$;
- $\int \frac{x^4+1}{x^3+1} dx$;
- $\int \frac{x^4+1}{x^4+2x^2+1} dx$;
- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{(2x+1)\cos x}{1+\cos x} dx$;
- $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^3 x} dx$;
- $\int (\sqrt[3]{\sin x} + 2\cos^3 x) \cos x dx$;
- $\int \frac{dx}{x\sqrt{2+2x+x^2}}$;
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x})}$;
- $\int \frac{1}{x} \sqrt[3]{\frac{x}{x+1}} dx$.

4. Определенное интегрирование (по определению, четных/нечетных функций, «геометрическое» интегрирование). Например:

- найдите интеграл $\int_{-1}^2 \left(\frac{2^x+1}{4^{x+3}} + 4x - 3x^2 \right) dx$ по определению;

- b) найдите верхнюю S_n и нижнюю s_n суммы Дарбу для функции $y = 4 - x^2$ на отрезке $[0, 2]$ и его равномерного разбиения на n частей; покажите, что $S_n - s_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- c) $\int_{-1}^2 \frac{x^4 + x^5 - |x^4 - x^5|}{\sqrt{1 + |x|^5}} dx$; d) $\int_{-1}^2 \frac{\min\{\sin \frac{\pi}{4} x, \cos \frac{\pi}{4} x\}}{\sqrt{1 + \sin^2 \frac{\pi}{4} x}} dx$; e) $\int_{-1}^1 (x + 2)\sqrt{3 - 2x - x^2} dx$.

5. Приложения определенного интеграла: нахождение площадей плоских фигур, экономические, вероятностные. Например:

- a) найдите площадь фигуры $D = \{(x, y) : y \leq 6x - x^2, y \leq 6 - x, y \geq x - 6\}$;
- b) найдите среднее интегральное значение производительности труда, которая задается функцией $f(t) = \frac{2t + 1}{t^3 + 1}$ за время $t \in [0, 4]$;
- c) найдите объем выполненной работы за промежуток времени $[1, 14]$, если производительность труда равна $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{2x - 1}}$;
- d) найдите объем продукции, произведенный за 6 лет, если изменение функции Кобба-Дугласа со временем описывается формулой $f(t) = (2t + 1)e^{t/6}$;
- e) пусть X – случайная величина установившегося спроса на некоторый товар с функцией плотности распределения $f(x) = a \begin{cases} \min\{x^2, \sqrt{2 - x}\}, & x \in [0, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$

Найдите нормирующий множитель $a > 0$, среднее значение спроса $E[X]$ и вероятность того, что случайный спрос будет находиться в промежутке $[1, 3]$;

- f) методом центра масс найдите оптимальное размещение магазина на отрезке $[0, 4]$, если распределение покупателей на этом отрезке задано функцией

$$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right);$$

- g) найдите медианное решение оптимального размещения магазина на отрезке $[1, 4]$, если распределение покупателей на этом отрезке задано функцией

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x}.$$