Примерные задачи к экзамену

1. Сравните две модели x и y смартфона с помощью параметрической функции полезности $u(x;\mathbf{w}) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x)$, $(w_1, w_2) \in W = \{(w_1, w_2) \in [0,2]\times[1,2] : w_1 w_2 \geq 1\}$, если нормализованные критериальные функции f_1 и f_2 (характеризующие, например, мощность процессора и емкость аккумулятора) для двух моделей равны соответственно: $f_1(x) = 0.3$, $f_2(x) = 0.4$, $f_1(y) = 0.4$, $f_2(y) = 0.3$. Выполните сравнение:

а) по представителю — центру тяжести множества W;

б) по принципу максимина $\min\limits_{\mathbf{w}\in W} u(x^*;\mathbf{w}) = \max\limits_{x\in X} \min\limits_{\mathbf{w}\in W} u(x;\mathbf{w})$;

в) с помощью вероятности $\mathrm{P}\{u(x;\boldsymbol{\omega}) \geq u(y;\boldsymbol{\omega})\}$;

г) с помощью сравнения математических ожиданий $\mathrm{E}[u(x;\boldsymbol{\omega})]$ и $\mathrm{E}[u(y;\boldsymbol{\omega})]$, если ф.п. СВ $\boldsymbol{\omega}$ имеет вид $g_{\boldsymbol{\omega}}(w_1, w_2) = a\begin{cases} w_1, (w_1, w_2) \in W, \\ 0, \quad (w_1, w_2) \notin W. \end{cases}$

д) с помощью сравнения нечетких чисел $u(x;\tilde{\mathbf{w}}) \succcurlyeq u(y;\tilde{\mathbf{w}})$, $\tilde{\mathbf{w}} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$, $\tilde{w}_1 = (0,1,2)$, $\tilde{w}_2 = (0,2,2)$ — треугольные нечеткие числа, $\succcurlyeq$ — некоторое отношение сравнения нечетких чисел (по индексу Адамо, по индексу Ягера, по центру тяжести, по индексу Бааса – Квакернаака).

2. Рассматривается двухкритериальная задача инвестирования в некоторый регион. Векторный критерий $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ состоит из функций $y_1 = f_1(x_1) = \sqrt{x_1 - 1}$ и $y_2 = f_2(x_2) = 2x_2 - 2$, которые равны соответственно отдаче от инвестирования в производственную и социальную сферы региона. Эти функции определены на множестве вариантов $X = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 1, x_2 \geq 1, x_1 + x_2 \leq 10\}$. На плоскости $y_1 O y_2$ отметьте геометрическое место образа множества X при отображении (f_1, f_2). Найдите такой вариант инвестирования (x_1, x_2), при котором суммарная отдача от инвестирования будет максимальной.

3. Правительство планирует внести изменения в налоговое законодательство с целью стимулировать компании инвестировать в производственную и социальную сферы региона. Возможные изменения в законодательстве могут привести в некотором регионе к увеличениям инвестиций, которые описываются векторами $(y_1, y_2) \in V \subseteq \mathbb{R}^2$ (y_1, y_2 — увеличение инвестиций в производственную и в социальную сферы соответственно). Укажите на числовой плоскости границу Парето этого множества и найдите возможные суммарные инвестиции на границе Парето, если $V = \mathbb{R}^2_+ \cap \{V_1 \cup V_2 \cup V_3\}$, где $V_1 = \{(y_1, y_2) : 2y_1 + y_2 \leq 2\}$, $V_2 = \{(y_1, y_2) : y_1 + 3y_2 \leq 3\}$,

$$V_3 = \left\{(y_1, y_2) : y_1^2 + y_1^2 \leq 4, \left|\operatorname{arctg}\frac{y_2}{y_1} - \frac{\pi}{4}\right| \leq \frac{\pi}{6}\right\}.$$

4. В задаче выбора проектов для инвестирования каждый проект оценивается по двум критериям — стоимость (c, cost) и эффективность (e, efficienty). Пары значений этих критериев для ряда проектов приведены в табл. Найдите границу Парето этого множества. Найдите тот Парето-оптимальный проект, для которого удельная эффективность $\frac{e}{c}$ будет наибольшей.

№	1	2	3	4	5	6	7
c	2	2	3	3	4	5	6
e	2	3	3	4	4	5	5

5. Рассматривается двухкритериальная задача ПР о выборе наилучшего распределения инвестиций в развитие производства. Множество вариантов определяется двухфакторной моделью возможных инвестиций в затраты на труд и капитал:

$$X = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\},$$

где x_1 — затраты на труд (зарплаты, обучение, стимулирующие выплаты и пр.), x_2 — затраты на физический капитал (оборудование, аренда, материалы, комплектующие и пр.). Критериями являются две функции: производственная функция $f_1(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$, характеризующая объем дополнительного (в результате инвестирования) выпуска продукции, и функция $f_2(x_1, x_2) = x_1^{\frac{3}{4}} x_2^{\frac{1}{4}}$, характеризующее качество выпускаемой продукции. Найдите наилучший план инвестирования с помощью лексикографической процедуры выбора, считая, что критерий f_1 более важен, чем f_2, а уровни удовлетворенности и притязаний равны: $s_1 = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, $s_2 = \frac{\sqrt[4]{24}}{5}$, $a_1 = \frac{\sqrt[3]{48}}{7}$, $a_2 = \frac{4}{5}$.

6. Найдите оптимальное решение задачи 4 методом TOPSIS в линейной (манхэттенской) метрике $d_1(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = |y_1 - z_1| + |y_2 - z_2|$, если веса критериев $w_c = \frac{2}{3}$, $w_e = \frac{1}{3}$.

7. Четыре модели смартфона x_1, x_2, x_3, x_4 оцениваются по трем критериям: C — цена (у.е), E — емкость аккумулятора (мАч), P — плотность пикселей (ppi).

	C↓	E↑	P↑
x_1	30 000	3000	450
x_2	25 000	2500	380
x_3	28 000	3000	350
x_4	32 000	3500	400

а) выделите парето-оптимальные варианты;
б) решить задачу методом SMARTS, если предпочтения описываются функцией полезности
$u(y) = 0.2y_1 + 0.5y_2 + 0.3y_3$ (функцию полезности применять после нормирования).

8. Компании нужно найти оптимальный план выпуска своей продукции двух видов $(x_1, x_2) \in X$ относительно двух критериев: дохода от продаж $f_1 = 2x_1 + x_2$, который нужно максимизировать, и издержек $f_2 = x_1 + 3x_2$, который нужно минимизировать. Веса этих критериев $w_1 = \frac{2}{3}$ и $w_2 = \frac{1}{3}$ соответственно. Множество вариантов — ресурсное множество X описывается системой неравенств:

$$x_1 + 2x_2 \geq 2,\ x_2 \leq 1 + 2x_1,\ x_1 + 4x_2 \leq 13,\ 2x_1 - 3x_2 \leq 4. \qquad (*)$$

Найдите решение этой задачи методом целевого программирования относительно идеальной точки и с помощью функций расстояния: а) $d_{\mathbf{w},1}$; б) $d_{\mathbf{w},2}$; в) $d_{\mathbf{w},\infty}$.

9. Решите задачу 8 методом TOPSIS, если множество вариантов — это множество точек X, удовлетворяющих системе неравенств (*) и имеющих целочисленные координаты.

10. Решите задачу 8 методом главного критерия, если f_1 — главный критерий, а уровни удовлетворенности: а) $s_2 = 6$; б) $s_2 = 9$.

11. Пусть $I_1 = (1,3,5)$ и $I_2 = (1,2,6)$ — нечеткие стоимости акций двух компаний. Найдите расстояние между ними относительно метрики: а) $d(A,B) = \int_0^1 m(A_\alpha \Delta B_\alpha) d\alpha$, где $m(A\Delta B)$ — мера (сумма длин отрезков) симметрической разности $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$;
б) $d(A,B) = |Val(A) - Val(B)| + \frac{1}{2}|Am(A) - Am(B)|$.

12. Ранжируйте три варианта, представленных нечеткими числами $A=(0,1,3,4)$, $B=(0,2,5)$ и $C=(0,2,4,4)$ с помощью: а) индекса ранжирования Ягера; б) обобщенного индекса Ягера; в) центра тяжести; г) индекса Керри; д) индекса Бааса – Квакернаака и правил коллективного выбора.

13. Решите задачу рейтингования студентов I (Иванов), K (Кузнецов) и S (Сидоров) по успеваемости по трем предметам a («Математический анализ»), p («Программирование»), e («Английский язык») методом нечеткой взвешенной суммы (или нечетким TOPSIS), если их успеваемости и веса предметов являются нечеткими числами, которые заданы в табл.

студенты	a	p	e
I	(2, 4, 5, 5)	(2, 3, 4, 5)	(2, 4, 5)
K	(2, 3, 5)	(2, 3, 5, 5)	(2, 4, 5)
S	(2, 2, 4, 5)	(2, 4, ,5, 5)	(2, 5, 5)
веса	$w_a=(1,2,3,3)$	$w_p=(1,2,3)$	$w_e=(1,1,2,3)$

14. Инвестор хочет профинансировать один из стартапов из множества $X=\{x_1,x_2,x_3\}$. Неопределенным фактором является потенциал роста стартапа: оптимистичный (быстрый рост, высокая прибыль, u_1), нейтральный (медленный рост, небольшая прибыль, u_2), пессимистичный (убыточность, u_3). Критериальной функцией $f: X\times\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ является потенциальный доход/убыток от вложения. Значения критерия $f(x_i,u_k)$ заданы в таблице (матрица значений полезности)

	u_1	u_2	u_3
x_1	10	2	−5
x_2	12	5	−8
x_3	15	6	−10

Найдите оптимальное решение с помощью критерия:

а) равновозможных состояний Лапласа;
б) максимина Вальда;
в) максимакса;
г) пессимизма-оптимизма Гурвица для $\alpha=0.3$, $\alpha=0.8$;
д) минимакса сожалений Сэвиджа;
е) доменного Старра.

15. В задаче инвестирования в стартапы из множества $X=\{x_1,x_2,x_3\}$ предположим, что неопределенные факторы, связанные с потенциалом роста (оптимистичный ω_1, нейтральный ω_2, пессимистичный ω_3), имеют вероятностный характер и $p(\omega_1)=\dfrac{1}{5}$, $p(\omega_2)=\dfrac{1}{2}$ и $p(\omega_3)=\dfrac{3}{10}$. Критериальной функцией $f: X\times\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ является потенциальный доход/убыток от вложения. Значения критерия $f(x_i,\omega_k)$ заданы в таблице (матрица значений полезности)

	ω_1	ω_2	ω_3
x_1	20	0	−15
x_2	10	5	−5
x_3	15	2	−10

Найдите оптимальное «чистое» инвестирование (т. е. выберете один стартап), максимизирующее ожидаемую полезность, если функция полезности: а) $u(y)=y$; б) $u(y)=\operatorname{sgn} y\sqrt{|y|}$; в) $u(y)=y^2\operatorname{sgn} y$. Как изменится результат, если требуется найти оптимальное смешанное инвестирование, т. е. необходимо определить доли инвестирования в каждый стартап λ_1, λ_2, λ_3, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1$, максимизирующие смешанную ожидаемую полезность (полагаем, что данные в таблице — доход/убыток на единицу инвестирования)?