ПОРОГОВОЕ АГРЕГИРОВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ И НЕЧЕТКИХ РАНЖИРОВОК

А.Е. Лепский

НИУ ВШЭ, Москва

Общемосковский семинар «Экспертные оценки и анализ данных»,
22 января 2025, ИПУ РАН, Москва

Задача ранжирования альтернатив

Задача. Требуется ранжировать альтернативы, каждая из которых оценивается по ряду критериев.
Популярный метод решения — агрегирование критериальных векторов, соответствующих каждой альтернативе, в ранги этих альтернатив [Подиновский 2023].

Зачастую такие правила должны иметь **некомпенсаторный характер**, т. е. низкие оценки по одним критериям не могут быть компенсированы высокими оценками по другим критериям.

Примеры: выбор товаров по ряду критериев, отбор кандидатов на должность и т. д.

Одним из некомпенсторных методов агрегирования предпочтений является **пороговое правило агрегирования, ПА** [Алескеров и Якуба 2003, Алескеров и др 2007].

План презентации

Классическое ПА: все альтернативы оцениваются в m-градационной шкале.

Оценки в альтернативах могут быть **неточными**. В этом случае возникает задача **обобщения ПА**.

Характер неточностей данных (например, экспертных оценок): вероятностный, интервальный, нечеткий и т. д.

План презентации

- классическая постановка ПА;
- задача ПА с неточными данными;
    - задача ПА с вероятностными данными;
    - задача ПА с нечеткими данными.

Классическая постановка ПА

[Алескеров и Якуба 2003, Алескеров и др 2007]

Пусть X — множество альтернатив-векторов $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$, где $x_i \in \{1, 2, 3\}$. Требуется построить оператор агрегирования $\varphi_n = \varphi : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям:

1) Парето-доминирование: если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ и $x_i \geq y_i \quad \forall i$, $\exists s: \ x_s > y_s$, то $\varphi(\mathbf{x}) > \varphi(\mathbf{y})$;
2) попарная компенсируемость критериев: если $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ и $v_k(\mathbf{x}) = v_k(\mathbf{y})$ $k = 1, 2$, то $\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{y})$, где $v_k(\mathbf{x}) = |\{i : x_i = k\}|$ — число оценок k в альтернативе $\mathbf{x}$, $k = 1, 2, 3$;
3) пороговая некомпенсируемость: $\varphi(\underbrace{2, \ldots, 2}_{n}) > \varphi(\mathbf{x})$ $\forall \mathbf{x} \in X$: $\exists s: \ x_s = 1$;
4) аксиома редукции: если $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ $\exists s: \ x_s = y_s$, то $\varphi_n(\mathbf{x}) > \varphi_n(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \varphi_{n-1}(\mathbf{x}_{-s}) > \varphi_{n-1}(\mathbf{y}_{-s})$, где $\mathbf{x}_{-s} = (x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n)$.

Показано, что указанным аксиомам удовлетворяет **лексикографическое правило** агрегирования:

$$\varphi(\mathbf{x}) > \varphi(\mathbf{y}) \Leftrightarrow$$

$$v_1(\mathbf{x}) < v_1(\mathbf{y})$$

$$\text{или } \exists j \in \{1, 2\} : v_k(\mathbf{x}) = v_k(\mathbf{y}) \forall k \leq j \text{ и } v_{k+1}(\mathbf{x}) < v_{k+1}(\mathbf{y}).$$

В [Aleskerov et al 2010] задача ПА была обобщена на случай m-градационных шкал, $m \geq 3$.

Задача ПА альтернатив с неточными данными

Два основных подхода к построению обобщений ПА на случай неточных данных:

- построение аксиоматики и правила агрегирования на основе этой новой аксиоматики;
- построение аналога вектора мощности оценок для неточных данных.

Аналог вектора мощности оценок для неточных данных:

- построение скалярной мощности множества неточных оценок;
- построение неточной функции мощности множества неточных оценок в рамках выбранной теории описания неточности.

Задача ПА альтернатив с вероятностными данными

[Лепский 2024]

Пусть каждая альтернатива представлена n-мерным вектором $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_n})$, где оценка $\widetilde{x}_i$ характеризуется тройкой неотрицательных чисел

$$\widetilde{x}_i = (p_{iL}, p_{iM}, p_{iH}), \;\; p_{iL} + p_{iM} + p_{iH} = 1, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Числа p_{iL}, p_{iM} и p_{iH} — субъективные вероятности, с которыми i-й эксперт оценивает принадлежность альтернативы классам низких оценок L, средних оценок M и высоких оценок H соответственно.

Относительно альтернативы $\widetilde{\mathbf{x}}$ имеем матрицу

$$\mathbf{P}\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = \left(p_{iS}\right)_{i=1;\, S=L,M,H}^{n}.$$

Случайная мощность множества оценок

Рассмотрим СВ $C_S(\widetilde{\mathbf{x}})$, принимающую значения $k \in \{0, \ldots, n\}$ и $P\{C_S(\widetilde{\mathbf{x}}) = k\}$ — вероятность того, что среди оценок n экспертов будет ровно k оценок класса $S \in \{L, M, H\}$.

СВ $C_S(\widetilde{\mathbf{x}})$ — случайные мощности множества оценок класса $S \in \{L, M, H\}$.

Пусть $I_k = \{(i_1, \ldots, i_k) : 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$. Тогда $P\{C_S(\widetilde{\mathbf{x}}) = k\} = q_k(\mathbf{p}_S)$, где $\mathbf{p}_S = (p_{1S}, \ldots, p_{nS})$ и

$$q_0(\boldsymbol{\alpha}) = (1 - \alpha_1) \ldots (1 - \alpha_n),$$

$$q_k(\boldsymbol{\alpha}) = \sum_{(i_1, \ldots, i_k) \in I_k} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} (1 - \alpha_{j_1}) \ldots (1 - \alpha_{j_{n-k}}), \quad (1)$$

где $\{j_1, \ldots, j_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\} \backslash \{i_1, \ldots, i_k\}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in [0, 1]^n$.

Свойства случайной мощности

Пусть $Q(\boldsymbol{\alpha})$ — СВ, имеющая распределение (1).

Отметим некоторые его свойства:

1) если $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n$, то $q_k(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} 1, & k = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \\ 0, & k \neq \sum_{i=1}^n \alpha_i, \end{cases}$ $k = 0, \ldots, n$;

   т. е. в случае вырожденных (неслучайных) оценок распределение $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) = (q_0(\boldsymbol{\alpha}), \ldots, q_n(\boldsymbol{\alpha}))$ также становится вырожденным и $q_k(\boldsymbol{\alpha}) = 1$ для индекса k, равного мощности множества (неслучайных) оценок.

2) если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = p \in (0, 1)$, то $q_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, \ldots, n$ — биномиальное распределение;

3) $E[Q(\boldsymbol{\alpha})] = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k;$

из 3) $\Rightarrow E\left[C_S\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right)\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{iS},\ S \in \{L, M, H\};$

4) $\sigma^2[Q(\boldsymbol{\alpha})] = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(1-\alpha_k);$

5) распределение $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) = (q_0(\boldsymbol{\alpha}), \ldots, q_n(\boldsymbol{\alpha}))$ — унимодальное, т. е. $\exists r, s \in \{0, \ldots, n\}$, $r \leq s$: последовательности $(q_0(\boldsymbol{\alpha}), \ldots, q_r(\boldsymbol{\alpha}))$ — неубывающая, $(q_s(\boldsymbol{\alpha}), \ldots, q_n(\boldsymbol{\alpha}))$ — невозрастающая, $q_r(\boldsymbol{\alpha}) = \ldots = q_s(\boldsymbol{\alpha})$.

Лексикографическое ранжирование случайных мощностей оценок

Для применения лексикографического правила ранжирования множества векторных вероятностных альтернатив $\{\widetilde{\mathbf{x}}\}$ относительно функции вероятностной мощности $\mathbf{C}(\widetilde{\mathbf{x}}) = (C_L(\widetilde{\mathbf{x}}), C_M(\widetilde{\mathbf{x}}), C_H(\widetilde{\mathbf{x}}))$ необходимо использовать некоторое правило сравнения вероятностных распределений.

Если использовать сравнение по среднему значению $E[\cdot]$, то

$$\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}) > \varphi(\widetilde{\mathbf{y}}) \Leftrightarrow E[C_L(\widetilde{\mathbf{x}})] < E[C_L(\widetilde{\mathbf{y}})]$$

$$\text{или} \;\; E[C_L(\widetilde{\mathbf{x}})] = E[C_L(\widetilde{\mathbf{y}})], \;\; E[C_M(\widetilde{\mathbf{x}})] < E[C_M(\widetilde{\mathbf{y}})]$$

$$\text{или} \;\; E[C_L(\widetilde{\mathbf{x}})] = E[C_L(\widetilde{\mathbf{y}})], \;\; E[C_M(\widetilde{\mathbf{x}})] = E[C_M(\widetilde{\mathbf{y}})],$$

$$E[C_H(\widetilde{\mathbf{x}})] < E[C_H(\widetilde{\mathbf{y}})].$$

Численный пример

Пусть заданы 5 вероятностных оценок двух альтернатив: векторы $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_5})$ и $\widetilde{\mathbf{y}} = (\widetilde{y_1}, \ldots, \widetilde{y_5})$.

$\widetilde{\mathbf{x}}$	$\widetilde{\mathbf{y}}$
$\widetilde{x_1} = (0.3,\ 0.6,\ 0.1)$	$\widetilde{y_1} = (0.2,\ 0.3,\ 0.5)$
$\widetilde{x_2} = (0.4,\ 0.5,\ 0.1)$	$\widetilde{y_2} = (0.2,\ 0.7,\ 0.1)$
$\widetilde{x_3} = (0.6,\ 0.2,\ 0.2)$	$\widetilde{y_3} = (0.8,\ 0.2,\ 0)$
$\widetilde{x_4} = (0.7,\ 0.2,\ 0.1)$	$\widetilde{y_4} = (0.1,\ 0.3,\ 0.6)$
$\widetilde{x_5} = (0.3,\ 0.3,\ 0.4)$	$\widetilde{y_5} = (0.1,\ 0.9,\ 0)$

Результаты вычислений распределений
$\mathbf{C}(\widetilde{\mathbf{x}}) = (C_L(\widetilde{\mathbf{x}}), C_M(\widetilde{\mathbf{x}}), C_H(\widetilde{\mathbf{x}}))$ и $\mathbf{C}(\widetilde{\mathbf{y}}) = (C_L(\widetilde{\mathbf{y}}), C_M(\widetilde{\mathbf{y}}), C_H(\widetilde{\mathbf{y}}))$:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$E[\cdot]$
$P\{C_L(\widetilde{\mathbf{x}}) = k\}$	0.03	0.19	0.36	0.3	0.11	0.01	2.3
$P\{C_M(\widetilde{\mathbf{x}}) = k\}$	0.09	0.31	0.37	0.19	0.04	0	1.8
$P\{C_H(\widetilde{\mathbf{x}}) = k\}$	0.35	0.44	0.18	0.03	0	0	0.9
$P\{C_L(\widetilde{\mathbf{y}}) = k\}$	0.1	0.49	0.32	0.08	0.01	0	1.4
$P\{C_M(\widetilde{\mathbf{y}}) = k\}$	0.01	0.15	0.4	0.33	0.1	0.01	2.4
$P\{C_H(\widetilde{\mathbf{y}}) = k\}$	0.18	0.47	0.32	0.03	0	0	1.2

Тогда

$$\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}) < \varphi(\widetilde{\mathbf{y}}),$$

так как

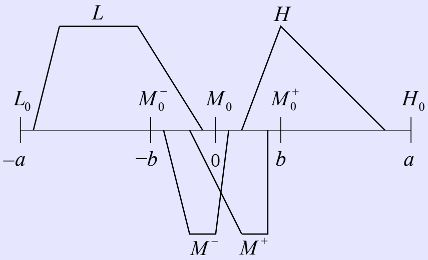
$$E[C_L(\widetilde{\mathbf{x}})] > E[C_L(\widetilde{\mathbf{y}})].$$

Задача ПА альтернатив с нечеткими данными. Метрический подход

[Lepskiy 2023]

Теперь будем предполагать, что альтернативы представлены векторами нечетких чисел (НЧ) $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x_1}, \dots, \widetilde{x_n})$.

Каждое НЧ принадлежит одному из 4-х классов: **низких оценок** L, **отрицательных средних оценок** M^-, **положительных средних оценок** M^+ или **высоких оценок** H:



Общая схема нечеткого ПА

Для каждой альтернативы $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_n})$ и каждого класса $S \in \{L, M^-, M^+, H\}$ выполняются следующие шаги:

1. Вычисляются расстояния $d\left(\widetilde{x_i}, S_0\right)$ $\forall \widetilde{x_i} \in S$, $i = 1, \ldots, n$.
2. Вычисляется величина
$$F_S\left(\widetilde{x_i}\right) = \psi\left(d\left(\widetilde{x_i}, S_0\right)\right),$$
характеризующая нормированную степень уверенности того, что оценка $\widetilde{x_i} \in S$, где функция $\psi \searrow$: $[0, +\infty) \to [0, 1]$, $\psi(0) = 1$.
3. Вычисляется величина
$$v_S\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = \sum_{\widetilde{x_i} \in S} F_S\left(\widetilde{x_i}\right), \quad S \in \{L, M^-, M^+, H\},$$
характеризующая мощность множества нечетких оценок класса S.

4. Применяется лексикографическое правило ранжирования:

$$\varphi\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) > \varphi\left(\widetilde{\mathbf{y}}\right) \Leftrightarrow$$

$$v_L\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) < v_L\left(\widetilde{\mathbf{y}}\right)$$

или

$$v_L\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = v_L\left(\widetilde{\mathbf{y}}\right), \;\; v_{M^-}\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) < v_{M^-}\left(\widetilde{\mathbf{y}}\right)$$

или

$$v_L\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = v_L\left(\widetilde{\mathbf{y}}\right), \;\; v_{M^-}\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = v_{M^-}\left(\widetilde{\mathbf{y}}\right), \;\; v_{M^+}\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) < v_{M^+}\left(\widetilde{\mathbf{y}}\right)$$

или

$$v_L\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = v_L\left(\widetilde{\mathbf{y}}\right), \;\; v_{M^-}\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = v_{M^-}\left(\widetilde{\mathbf{y}}\right),$$

$$v_{M^+}\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = v_{M^+}\left(\widetilde{\mathbf{y}}\right), \;\; v_H\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) < v_H\left(\widetilde{\mathbf{y}}\right).$$

Численный пример

Ранжирование статей в системе управления конференциями типа **EasyChair**.

В этой системе используется 7-балльная шкала оценивания $x_i \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ — оценки соответствуют рекомендациям «strong reject», «reject», «weak reject», «borderline paper», «weak accept», «accept», «strong accept». Кроме того, рецензент должен в 5-балльной шкале (0.2 – «none», 0.4 – «low», 0.6 – «medium», 0.8 – «high», 1 – «expert») оценить степень уверенности в своем решении: $\lambda_i \in \{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\}$.

Данные $\left\{(x_i^{(k)}, \lambda_i^{(k)})\right\}_{i=1}^{5}$ оценок $n = 5$ рецензентов относительно 4 статей представлены в Табл.(i — индекс рецензента, k — индекс статьи, $k = 1, \ldots, 4$), где $L = \{-3, -2, -1\}$, $M = \{0\}$, $H = \{1, 2, 3\}$.

	paper 1	paper 2	paper 3	paper 4
rev. 1	$(2, 0.8)$	$(2, 1)$	$(1, 0.8)$	$(0, 0.6)$
rev. 2	$(1, 1)$	$(2, 0.8)$	$(2, 0.6)$	$(1, 0.4)$
rev. 3	$(0, 0.8)$	$(0, 0.6)$	$(-1, 0.6)$	$(1, 1)$
rev. 4	$(3, 0.4)$	$(-1, 0.4)$	$(0, 0.6)$	$(2, 0.2)$
rev. 5	$(2, 0.6)$	$(1, 0.6)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$
$\mathbf{x}^{(k)}$	$(0, 1, 2, 2, 3)$	$(-1, 0, 1, 2, 2)$	$(-1, 0, 1, 1, 2)$	$(0, 1, 1, 2, 2)$
$\mathbf{t}^{(k)}$	(M, H, H, H, H)	(L, M, H, H, H)	(L, M, H, H, H)	(M, H, H, H, H)

Если мы будем учитывать только 3-градационные рекомендации рецензентов ($L = \{-3, -2, -1\}$, $M = \{0\}$, $H = \{1, 2, 3\}$) и не учитывать степени уверенности в этих оценках, то получим вектор мощностей оценок $\mathbf{v}(\mathbf{x}^{(k)}) = \big(v_L(\mathbf{x}^{(k)}), v_M(\mathbf{x}^{(k)}), v_H(\mathbf{x}^{(k)})\big)$, $k = 1, \ldots, 4$.

Если к средним оценкам M будем также относить оценки ± 1 с низкой степенью уверенности $\lambda \le 0.6$, то получим расширенный вектор мощностей оценок $\mathbf{v}_{\text{ext}}(\mathbf{x}^{(k)})$, $k = 1, \ldots, 4$.

	paper 1	paper 2	paper 3	paper 4
$\mathbf{v}(\mathbf{x}^{(k)})$	$(0, 1, 4)$	$(1, 1, 3)$	$(1, 1, 3)$	$(0, 1, 4)$
$\mathbf{v}_{\text{ext}}(\mathbf{x}^{(k)})$	$(0, 1, 4)$	$(0, 3, 2)$	$(0, 2, 3)$	$(0, 2, 3)$
$\mathbf{v}(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)})$	$(0, 0.5, 0.5, 2.59)$	$(0, 1.33, 1.33, 1.3)$	$(0, 1.33, 0.5, 1.57)$	$(0, 0.5, 1.33, 1.75)$

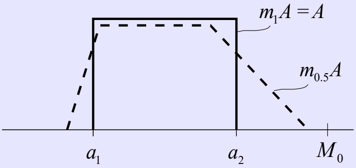
Численный пример. Формирование нечетких оценок

Информация о степени уверенности λ в правильности своего решения может быть использована для размытия интервальных или точечных оценок.

Принципы размытия:

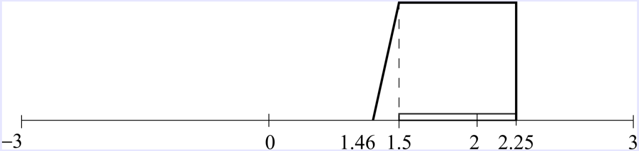
1. чем ниже степень уверенности λ, тем больше должна быть степень размытия и мера неопределенности нечетких оценок;
2. для оценок с наивысшей степенью уверенности $\lambda = 1$ степень размытия должна быть нулевой;
3. крайние оценки $(L$ или $H)$ с низкой степенью уверенности λ не должны после размытия удалиться от нейтральной оценки: смещение оценки с низкой степенью уверенности к нейтральной оценке делает ее менее конфликтной с другими оценками.

Эти принципы можно реализовать с помощью так называемых **модификаторов** в теории нечетких множеств



В результате точечная оценка (x, λ) преобразуется в НЧ $\widetilde{x}$. Например,

$$(2, 0.8) \to [1.5;\ 2.25] \to (1.46,\ 1.5,\ 2.25,\ 2, 25).$$



Итоговое ранжирование

После размытия вычислим векторы скалярных нечетких мощностей $\mathbf{v}(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}) = \big(v_L(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}), v_{M^-}(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}), v_{M^+}(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)}), v_H(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)})\big)$.

Итоговое ранжирование:

	ранжирование
$\mathbf{v}(\mathbf{x}^{(k)})$	$\varphi(\mathbf{x}^{(1)}) = \varphi(\mathbf{x}^{(4)}) > \varphi(\mathbf{x}^{(3)}) = \varphi(\mathbf{x}^{(2)})$
$\mathbf{v}_{\text{ext}}(\mathbf{x}^{(k)})$	$\varphi(\mathbf{x}^{(1)}) > \varphi(\mathbf{x}^{(4)}) = \varphi(\mathbf{x}^{(3)}) > \varphi(\mathbf{x}^{(2)})$
$\mathbf{v}(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)})$	$\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}^{(1)}) > \varphi(\widetilde{\mathbf{x}}^{(4)}) > \varphi(\widetilde{\mathbf{x}}^{(3)}) > \varphi(\widetilde{\mathbf{x}}^{(2)})$

Видно, что нечеткое ПА более чувствительно, чем неразмытое.

Задача ПА альтернатив с нечеткими данными с помощью нечеткой кардинальности

[Lepskiy 2024]

Пусть теперь каждая альтернатива представлена n-мерным вектором $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x_1}, \dots, \widetilde{x_n})$ нечетких множеств (НМ). Каждое такое НМ $\widetilde{x_i}$ определяется на 3-градационном базовом множестве $\{L, M, H\}$ с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{x_i}}$.

Будем представлять НМ $\widetilde{x_i}$ как унимодальный вектор:
$\widetilde{x_i} = (\mu_{\widetilde{x_i}}(L), \mu_{\widetilde{x_i}}(M), \mu_{\widetilde{x_i}}(H))$.

Пороговая процедура вычисления нечеткой кардинальности

Нечеткая кардинальность (НК) $\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})$ will определяется на базовом множестве $\{0,\ldots,n\}$ (n — число критериев). Функция принадлежности НК $\mu_{\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})}$ для класса оценок $S\in\{L,M,H\}$ должна удовлетворять следующим оценкам:

1) $\mu_{\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})}(k)=1\Leftrightarrow k=\left\lfloor\sum_{\widetilde{x}\in S_{\widetilde{\mathbf{x}}}}\mu_{\widetilde{x}}(S)\right\rfloor$, где $S_{\widetilde{\mathbf{x}}}$ — множество всех оценок класса S, для которых достигается максимум функции принадлежности;
2) $\mu_{\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})}(k)=0$, if $k<\left\lfloor\sum_{\widetilde{x}\in S_{\widetilde{\mathbf{x}}}}\mu_{\widetilde{x}}(S)\right\rfloor$.

Эти условия гарантируют, что мощность множества оценок для класса S не может быть меньше числа оценок безусловно принадлежащим этому классу.

Желательными свойствами НК также будут следующие.
Пусть Fuz — некоторая степень нечеткости НМ и

$$Fuz\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = \left(Fuz\left(\widetilde{x_1}\right), \ldots, Fuz\left(\widetilde{x_n}\right)\right).$$

Для векторов $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ и $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ сравнение $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ означает, что $a_1 \geq b_1, \ldots, a_n \geq b_n$.

3) если $Fuz\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) \geq Fuz\left(\widetilde{\mathbf{y}}\right)$, то $Fuz\left(\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})\right) \geq Fuz\left(\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{y}})\right)$ $\forall S \in \{L, M, H\}$.
4) если $Fuz\left(\widetilde{\mathbf{x}}\right) = \mathbf{0}$, то $\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}}) = v_S(\mathbf{x})$ $\forall S \in \{L, M, H\}$.

   Последнее условe означает, что если нечеткие оценки являются неразмытыми (т. е. $\mu_{\widetilde{x_i}}(S) \in \{0, 1\}$ $\forall S \in \{L, M, H\}$), то нечеткая кардинальность будет совпадать с обычной мощностью.

Оставшиеся значения $\mu_{\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})}(k)$ для $k > \left\lfloor \sum_{\widetilde{x} \in S_{\widetilde{\mathbf{x}}}} \mu_{\widetilde{x}}(S) \right\rfloor$ найдем, использую следующую **пороговую процедуру**.

Пусть $S_1, S_2, S_3 \in \{L, M, H\}$ — такие три класса оценок, что $\mu_{\widetilde{x}_i}(S_1) > \mu_{\widetilde{x}_i}(S_2) \geq \mu_{\widetilde{x}_i}(S_3)$.

Тогда назовем оценку $\widetilde{x}_i$ оценкой **1-го уровня** для класса S_1, **2-го уровня** для класса S_2 и **3-го уровня** для класса S_3.

Упорядочим все значения $\mu_{\widetilde{x}_i}(S) = q_i$, $i = 1, \ldots, n$ по возрастанию их уровней для фиксированного класса S:

$$q_{i_1}^{(1)}, \ldots, q_{i_k}^{(1)}, q_{i_k+1}^{(2)}, \ldots, q_{i_r}^{(2)}, q_{i_r+1}^{(3)}, \ldots, q_{i_n}^{(3)}$$

(верхний индекс — номер уровня).

Тогда для оценок **1-го уровня** в соответствии с условем 1): $\mu_{\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})}(p_1) = 1$, где $p_1 := \left\lfloor q_{i_1}^{(1)} + \ldots + q_{i_k}^{(1)} \right\rfloor$. Если оценок 1 уровня нет, то $p_1 = 0$.

Если существует достаточно много оценок **2-го уровня**, то это означает, что значение функции принадлежности НК должно быть достаточно большим для кардинальностей, больших p_1. Например, может быть использована следующая пороговая процедура.

Если $p_2 = \left\lfloor \left\{ q_{i_1}^{(1)} + \ldots + q_{i_k}^{(1)} \right\} + q_{i_k+1}^{(2)} + \ldots + q_{i_r}^{(2)} \right\rfloor \geq 1$, то $\mu_{\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})}(p_1 + 1) = \ldots = \mu_{\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})}(p_1 + p_2) = m_2$, где $m_2 \in (0, 1)$. Здесь $\{\ \}$ — дробная часть числа.

Аналогично учитываются оценки **3-го уровня**. Если $p_3 = \left\lfloor \left\{ \left\{ q_{i_1}^{(1)} + \ldots + q_{i_k}^{(1)} \right\} + q_{i_k+1}^{(2)} + \ldots + q_{i_r}^{(2)} \right\} + q_{i_r+1}^{(3)} + \ldots + q_{i_n}^{(3)} \right\rfloor \geq 1$, то увеличим на m_3 функцию принадлежности $\mu_{\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})}$ для значений аргумента $p_1 + 1, \ldots, p_1 + p_3$, где $0 < m_3 < \min\{m_2, 1 - m_2\}$.

Пример

Предположим, что есть вектор $\widetilde{\mathbf{x}} = (\widetilde{x_1}, \ldots, \widetilde{x_5})$ из 5 нечетких оценок $\widetilde{x_i} = (\mu_{\widetilde{x_i}}(L), \mu_{\widetilde{x_i}}(M), \mu_{\widetilde{x_i}}(H))$, $i = 1, \ldots, 5$, где

$$\widetilde{x_1} = (0.5,\ 0.6,\ 1),\ \ \widetilde{x_2} = (0.3,\ 0.5,\ 1),$$

$$\widetilde{x_3} = (0.5,\ 1,\ 0.4),\ \ \widetilde{x_4} = (1,\ 0.8,\ 0.3),\ \ \widetilde{x_5} = (1,\ 0.5,\ 0.2).$$

Тогда в соответствии с процедурой получим следующие значений функций принадлежности НК для каждого класса

$$\widetilde{v_L}(\widetilde{\mathbf{x}}) = (0, 0, 1, m_3, 0, 0),\ \ \widetilde{v_M}(\widetilde{\mathbf{x}}) = (0, 1, m_2, m_2, 0, 0),$$

$$\widetilde{v_H}(\widetilde{\mathbf{x}}) = (0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Сравнение НК и ранжирование альтернатив

Пусть $\mathcal{V}_n$ — множество всех НК для n нечетких оценок.

Для применения лексикографической процедуры ранжирования векторов нечетких альтернатив $\{\widetilde{\mathbf{x}}\}$ относительно НК $\widetilde{\mathbf{v}}(\widetilde{\mathbf{x}}) = (\widetilde{v_L}(\widetilde{\mathbf{x}}), \widetilde{v_M}(\widetilde{\mathbf{x}}), \widetilde{v_H}(\widetilde{\mathbf{x}}))$, необходимо применить некоторое правило сравнения нечетких множеств. Это можно сделать с помощью некоторой функции дефаззификации $F : \mathcal{V}_n \to \mathbb{R}$.

Будем считать, что НК оценок класса S для двух альтернатив $\widetilde{\mathbf{x}}$ and $\widetilde{\mathbf{y}}$ связаны отношением $\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}}) \prec \widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{y}})$, если $F(\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})) < F(\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{y}}))$ и отношением $\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}}) \sim \widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{y}})$, если $F(\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})) = F(\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{y}}))$.

Например, если использовать в качестве функции дефаззификации центр тяжести

$$G\left(\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})\right) = \sum_{i=0}^{n} i\mu_{\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})}(i) \Bigg/ \sum_{i=0}^{n} \mu_{\widetilde{v_S}(\widetilde{\mathbf{x}})}(i),$$

то для примера выше получим:

$$G\left(\widetilde{v_L}(\widetilde{\mathbf{x}})\right) = \frac{2+3m_3}{1+m_3}, \quad G\left(\widetilde{v_M}(\widetilde{\mathbf{x}})\right) = \frac{1+5m_2}{1+2m_2}, \quad G\left(\widetilde{v_H}(\widetilde{\mathbf{x}})\right) = 2.$$

Тогда для любых допустимых значений порогов m_2 и m_3 имеем: $G\left(\widetilde{v_M}(\widetilde{\mathbf{x}})\right) < G\left(\widetilde{v_H}(\widetilde{\mathbf{x}})\right) < G\left(\widetilde{v_L}(\widetilde{\mathbf{x}})\right)$. Поэтому получим ранжирование:

$$\widetilde{v_M}(\widetilde{\mathbf{x}}) \prec \widetilde{v_H}(\widetilde{\mathbf{x}}) \prec \widetilde{v_L}(\widetilde{\mathbf{x}}).$$

В общем случае нечеткое ПА и ранжирование для двух альтернатив $\widetilde{\mathbf{x}}$ и $\widetilde{\mathbf{y}}$ выполняется по правилу:

$$\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}) > \varphi(\widetilde{\mathbf{y}}) \Leftrightarrow \begin{array}{r} \widetilde{v_L}(\widetilde{\mathbf{x}}) \prec \widetilde{v_L}(\widetilde{\mathbf{y}}) \\ \text{или } \widetilde{v_L}(\widetilde{\mathbf{x}}) \sim \widetilde{v_L}(\widetilde{\mathbf{y}}),\ \widetilde{v_M}(\widetilde{\mathbf{x}}) \prec \widetilde{v_M}(\widetilde{\mathbf{y}}) \\ \text{или } \widetilde{v_L}(\widetilde{\mathbf{x}}) \sim \widetilde{v_L}(\widetilde{\mathbf{y}}),\ \widetilde{v_M}(\widetilde{\mathbf{x}}) \sim \widetilde{v_M}(\widetilde{\mathbf{y}}),\ \widetilde{v_H}(\widetilde{\mathbf{x}}) \prec \widetilde{v_H}(\widetilde{\mathbf{y}}) \end{array}$$

Численный пример

Рассмотрим тот же пример ранжирования статей из системы EasyChair.

	paper 1	paper 2	paper 3	paper 4
rev. 1	$(2, 0.8)$	$(2, 1)$	$(1, 0.8)$	$(0, 0.6)$
rev. 2	$(1, 1)$	$(2, 0.8)$	$(2, 0.6)$	$(1, 0.4)$
rev. 3	$(0, 0.8)$	$(0, 0.6)$	$(-1, 0.6)$	$(1, 1)$
rev. 4	$(3, 0.4)$	$(-1, 0.4)$	$(0, 0.6)$	$(2, 0.2)$
rev. 5	$(2, 0.6)$	$(1, 0.6)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$
$\mathbf{x}^{(k)}$	$(0, 1, 2, 2, 3)$	$(-1, 0, 1, 2, 2)$	$(-1, 0, 1, 1, 2)$	$(0, 1, 1, 2, 2)$
$\mathbf{t}^{(k)}$	(M, H, H, H, H)	(L, M, H, H, H)	(L, M, H, H, H)	(M, H, H, H, H)

Преобразуем точечные данные (z, λ) в 3-градационные нечеткие оценки $\widetilde{x} = \widetilde{x}(z, \lambda) = (\mu_{\widetilde{x}}(L), \mu_{\widetilde{x}}(M), \mu_{\widetilde{x}}(H))$ по правилу:

если $z \in H = \{1, 2, 3\}$ (высокие оценки), то $\widetilde{x} = \left(\frac{\lambda}{2z+\lambda}, \frac{\lambda}{z+\lambda}, \lambda\right)$;

если $z \in L = \{-3, -2, -1\}$ (низкие оценки), то $\widetilde{x} = \left(\lambda, \frac{\lambda}{|z|+\lambda}, \frac{\lambda}{2|z|+\lambda}\right)$;

если $z \in M = \{0\}$ (средние оценки), то $\widetilde{x} = \left(\frac{\lambda}{1+2\lambda}, \lambda, \frac{\lambda}{1+2\lambda}\right)$.

В результате получим нечеткие оценки.

	paper 1	paper 2	paper 3	paper 4
rev. 1	$(\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{4}{5})$	$(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1)$	$(\frac{2}{7}, \frac{4}{9}, \frac{4}{5})$	$(\frac{3}{11}, \frac{3}{5}, \frac{3}{11})$
rev. 2	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{4}{5})$	$(\frac{3}{23}, \frac{3}{13}, \frac{3}{5})$	$(\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{2}{5})$
rev. 3	$(\frac{4}{13}, \frac{4}{5}, \frac{4}{13})$	$(\frac{3}{11}, \frac{3}{5}, \frac{3}{11})$	$(\frac{3}{5}, \frac{3}{8}, \frac{3}{13})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$
rev. 4	$(\frac{1}{16}, \frac{2}{17}, \frac{2}{5})$	$(\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{1}{6})$	$(\frac{3}{11}, \frac{3}{5}, \frac{3}{11})$	$(\frac{1}{21}, \frac{1}{11}, \frac{1}{5})$
rev. 5	$(\frac{3}{23}, \frac{3}{13}, \frac{3}{5})$	$(\frac{3}{13}, \frac{3}{8}, \frac{3}{5})$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1)$	$(\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1)$
$\widetilde{v_L}^{(k)}$	$(1, m_3, 0, 0, 0, 0)$	$(1, m_3, 0, 0, 0, 0)$	$(1, m_3, 0, 0, 0, 0)$	$(1, m_3, 0, 0, 0, 0)$
$\widetilde{v_M}^{(k)}$	$(1, m_2, 0, 0, 0, 0)$	$(1, m_3, 0, 0, 0, 0)$	$(1, m_2, m_2, 0, 0, 0)$	$(1, m_2, 0, 0, 0, 0)$
$\widetilde{v_H}^{(k)}$	$(0, 0, 1, m_2, 0, 0)$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)$	$(0, 0, 1, 0, 0, 0)$
$\mathbf{G}^{(k)}$	$\left(\frac{m_3}{1+m_3}, \frac{m_2}{1+m_2}, \frac{2+3m_2}{1+m_2}\right)$	$\left(\frac{m_3}{1+m_3}, \frac{m_3}{1+m_3}, 2\right)$	$\left(\frac{m_3}{1+m_3}, \frac{3m_2}{1+2m_2}, 2\right)$	$\left(\frac{m_3}{1+m_3}, \frac{m_2}{1+m_2}, 2\right)$
$\mathbf{v}^{(k)}$	$(0, 1, 4)$	$(1, 1, 3)$	$(1, 1, 3)$	$(0, 1, 4)$

Итоговое ранжирование:

	ранжирование
$\mathbf{v}(\mathbf{x}^{(k)})$	$\varphi(\mathbf{x}^{(1)}) = \varphi(\mathbf{x}^{(4)}) > \varphi(\mathbf{x}^{(3)}) = \varphi(\mathbf{x}^{(2)})$
$\mathbf{v}_{\text{ext}}(\mathbf{x}^{(k)})$	$\varphi(\mathbf{x}^{(1)}) > \varphi(\mathbf{x}^{(4)}) = \varphi(\mathbf{x}^{(3)}) > \varphi(\mathbf{x}^{(2)})$
$\mathbf{v}(\widetilde{\mathbf{x}}^{(k)})$	$\varphi(\widetilde{\mathbf{x}}^{(1)}) > \varphi(\widetilde{\mathbf{x}}^{(4)}) > \varphi(\widetilde{\mathbf{x}}^{(3)}) > \varphi(\widetilde{\mathbf{x}}^{(2)})$
$\mathbf{G}^{(k)}$	$\varphi\left(\widetilde{\mathbf{x}}^{(2)}\right) > \varphi\left(\widetilde{\mathbf{x}}^{(4)}\right) > \varphi\left(\widetilde{\mathbf{x}}^{(1)}\right) > \varphi\left(\widetilde{\mathbf{x}}^{(3)}\right)$

На первое место вышла альтернатива $\mathbf{x}^{(2)}$, которая хотя и имеет одну низкую оценку, но степень уверенности в ней у рецензента также низкая. Поэтому она оказала малое влияние на нечеткую кардинальность.

- Алескеров Ф.Т., Якуба В.И. Об одном методе агрегирования ранжировок специального вида // Тез. докл. II межд. конф. по пробл. упр. – М.: ИПУ РАН, 2003. С. 116.
- Алескеров Ф.Т., Юзбашев Д.А., Якуба В.И. Пороговое агрегирование трехградационных ранжировок // Автоматика и телемеханика. 2007. № 1. С. 147–152.
- Броневич А.Г., Лепский А.Е. Нечеткие модели анализа данных и принятия решений: учебное пособие.– М.: ИД ВШЭ, 2022. – 264 с.
- Лепский А.Е. Пороговое агрегирование вероятностных ранжировок // XIV ВСПУ: сб. науч. трудов. – М.: ИПУ РАН, 2024. – С. 3958–3962.
- Подиновский В.В. Многокритериальные задачи принятия решений: теория и методы анализа. М.: Юрайт, 2023.
- Aleskerov F., Chistyakov V., Kalyagin V. Social threshold aggregations // Social Choice Welfare. 2010. Vol. 35. P. 627–646.
- Lepskiy, A. Fuzzy Threshold Aggregation // In: Kahraman C. et al. (eds), Intelligent and Fuzzy Systems. INFUS 2023. LNNS. 2023. Cham: Springer. Vol. 758. P. 69–76.
- Lepskiy, A. Threshold Aggregation of Fuzzy Data Using Fuzzy Cardinalities of a Set of Fuzzy Estimates // In: Kahraman C. et al. (eds), INFUS 2024. LNNS. 2024. Cham: Springer. Vol. 1088. P. 91–98.

Спасибо за внимание

alex.lepskiy@gmail.com

alepskiy@hse.ru

https://www.hse.ru/en/org/persons/10586209