

**Темы лекций и текущие домашние задания
по курсу «Математический анализ»
ОП «Экономика и статистика», ФЭН НИУ ВШЭ, 2024/25 уч. год**

Задачники:

1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

1 модуль

02.09.2024

Лекция 1. Структура курса «Математический анализ» и особенности учебного процесса, организационные вопросы.

Понятие множеств, отношения и операций над ними. Числовые множества $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$, множество простых чисел, множество алгебраических чисел. Связь числовых множеств с возможностью решения различных алгебраических уравнений в этих множествах. Плотность \mathbb{Q} в \mathbb{R} . Числовая прямая, взаимно однозначное соответствие между множествами \mathbb{R} и числовой прямой. Отрезок, интервал, полуинтервал, бесконечные промежутки. Длина отрезка на прямой.

05.09.2024

Лекция 2. Окрестность точки на прямой.

Декартово произведение множеств.

Понятие равномоощных множеств. Конечные, счетные и несчетные множества, континуальные множества. Счетность множеств \mathbb{Z} и \mathbb{Q} . Несчетность множества \mathbb{R} . Примеры и свойства счетных множеств.

Понятия ограниченного сверху, ограниченного снизу и просто ограниченного числового множества. Понятия верхней и нижней граней. Определение точных верхней и нижней граней. Примеры. Теорема о существовании ТГ ограниченного множества (схема доказательства).

9.09.2024

Лекция 3. Теорема об отделимости числовых множеств.

Определение отображения (функции) и связанных понятий: область определения, множество значений, образ множества, прообраз множества. Типы отображений: инъективное, сюръективное, биективное. Примеры. Операции над функциями: арифметические, композиция функций (сложная функция). Примеры. Основные элементарные функции. Способы задания функций: аналитический, табличный, графический, описательный, неявный и др. График функции и эскиз графика.

Ограниченные и неограниченные функции. ТВГ и ТНГ функции на множестве. Наибольшее (максимальное) и наименьшее (минимальное) значения функции на множестве (экстремальные значения). Примеры.

Понятие обратной функции. Свойства обратной функции. Примеры.

12.09.2024

Лекция 4. Четные и нечетные функции. Примеры.

Монотонные функции. Примеры

Периодические функции. Примеры.

Примеры «экономических» функций: 1) функции спроса и предложения; 2) функции Торнквиста (взаимосвязь между спросом и доходом для различных категорий товара).

Последовательность. Способы задания последовательностей: явный, рекуррентный, описательный, графический. Примеры: формулы начисления процентов по вкладам: простые проценты, сложные проценты; непрерывные проценты.

Понятие предела последовательности. Ограниченность последовательности, имеющей предел. Единственность предельного значения.

16.09.2024

Лекция 5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, последовательности с пределами $\pm\infty$. Примеры. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей. Арифметические свойства пределов. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Примеры (в том числе пределы последовательностей $a^{1/n}$ и $n^{1/n}$).

18.09.2024

Лекция 6. Монотонные и ограниченные последовательности. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности. Примеры (в том числе пре-

делы последовательностей $\frac{a^n}{n!}$, $a > 0$; $\frac{n^k}{n!}$, $k \in \mathbb{Z}$; $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $x_1 > 0$, $a > 0$).

Предельный случай непрерывного начисления процентов на капитал. Предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Понятие подпоследовательности и частичных пределов.

23.09.2024

Лекция 7. Понятие подпоследовательности и частичных пределов. Верхний и нижний пределы последовательности. Примеры.

Понятие последовательности вложенных отрезков и стягивающихся отрезков.

Лемма Кантора о вложенных отрезках.

Теорема (Больцано – Вейерштрасса) о существовании сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности.

Понятие фундаментальной последовательности. Свойства фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности. Критерий расходимости последовательности. Пример (расходимость последовательности гармонических чисел). Асимптотика гармонических чисел.

Понятие предела функции по Гейне и Коши. Примеры.

25.09.2024

Лекция 8. Односторонние пределы. Пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Примеры.

Свойства пределов функции: локальные, связанные с неравенствами. Бесконечно малые функции и их свойства. Арифметические свойства пределов функции.

Пределы монотонной функции. Замена переменной при вычислении пределов. Примеры. Первый замечательный предел.

30.09.2024

Лекция 9. Следствия из первого замечательного предела. Примеры. Второй замечательный предел. Примеры.

Асимптоты функции: вертикальные и наклонные асимптоты. Теорема о существовании наклонной асимптоты. Примеры.

Понятие непрерывной функции. Непрерывность основных элементарных функций. Примеры.

2.10.2024

Лекция 10. Точки разрыва.

Свойства функций, непрерывных в точке: локальная ограниченность, свойство сохранения знака, арифметические свойства, непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций в естественной области определения.

Следствия из второго замечательного предела. Примеры. Эквивалентные функции. Замена функций эквивалентными при вычислении пределов.

7.10.2024

Лекция 11. О-символика (символы Ландау).

Свойства функций непрерывных на отрезке: теоремы Вейерштрасса об ограниченности и достижимости точных граней; теоремы Коши о нулях и о промежуточном значении. Решение уравнений методом половинного деления.

9.10.2024

Лекция 12. Теорема о неподвижной точке.

Мотивация введения производной как скорости изменения функции и углового коэффициента касательной. Определение производной.

Вычисление производной по определению. Примеры. Производные элементарных функций. Таблица производных. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормальной прямой. Односторонние производные и касательные. Примеры. Понятие дифференцируемой функции и дифференциала.

14.10.2024

Лекция 13. Теорема о связи производной и дифференцируемости. Геометрический смысл дифференциала. Приложения дифференциала к оцениванию погрешностей вычислений и к приближенным вычислениям. Правила дифференцирования (арифметические правила дифференцирования, производная сложной функции, логарифмическая производная). Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически.

16.10.2024

Лекция 14. Примеры функций экономического анализа: общие, средние и предельные издержки, доход.

Эластичность функции. Свойства эластичности. Примеры. Эластичность функций спроса от дохода.

Производная и дифференциал высших порядков. Функциональная интерпретация знака и абсолютного значения второй производной (выпуклость и кривизна).

Правила вычисления производных и дифференциалов n -го порядка: линейность, формула Лейбница. Примеры.

21.10.2024

Лекция 15. Понятие точек локального экстремума. Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой функции).

Теорема Ролля.

Теорема Лагранжа и ее следствия (формула конечных приращений, условия постоянства и линейности, о точках разрыва производной, о вычислении односторонних пределов, о доказательстве неравенств).

Теорема Коши о среднем.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Примеры.

6.11.2024

Лекция 16. Соотношения между ростами степенной, показательной и логарифмической функций.

Многочлен Тейлора и его свойства. Формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Теорема единственности. Частные случаи: формула Маклорена, представление четных и нечетных функций с помощью формулы Маклорена.

Примеры представлений основных элементарных функций формулой Маклорена.

Примеры разложений функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора к нахождению пределов.

11.11.2024

Лекция 17. Применение формулы Тейлора к вычислению значений функций с заданной точностью.

Исследование функций с помощью производных на монотонность.

Исследование функций с помощью производных: на существование точек локального экстремума (необходимое условие, достаточное условие в терминах изменения знака производной, достаточное условие в терминах старших производных). Нахождение наибольшего и наименьшего значений функций на отрезке.

Понятие выпуклой (вогнутой) дифференцируемой функции. Свойства выпуклых функций. Критерий нестрогой выпуклости и достаточное условие строгой выпуклости дважды дифференцируемых функций.

Неравенство Йенсена, соотношение между средними значениями.

13.11.2024

Лекция 18. Выпуклость надграфика, подграфика выпуклых (вогнутых) функций. Понятие точки перегиба и достаточное условие существования точек перегиба.

Общий план исследования функции с помощью производных и построение эскиза графика.

Понятие метрического пространства (м.п.). Неравенства Коши-Буняковского, Минковского, треугольника. Метрическое пространство \mathbb{R}^n . Евклидово пространство \mathbb{R}^n , понятие нормы элемента \mathbb{R}^n . Открытые и замкнутые шары в м.п. и \mathbb{R}^n в разных метриках.

Предел последовательности в м.п. и в \mathbb{R}^n . Теорема о покоординатной сходимости последовательности в \mathbb{R}^n . Свойства сходящихся последовательностей в м.п. Фундаментальные последовательности и полнота м.п. Полнота пространства \mathbb{R}^n .

Понятия внутренней и граничных точек множества, границы множества, открытого и замкнутого множеств.

18.11.2024

Лекция 19. Понятия ограниченного множества, компактного множества, выпуклого и связного множеств. Свойства открытых и замкнутых множеств. Примеры: бюджетное множество.

Понятие функции многих переменных (ФМП). График функции и его визуализация для $n=2$. Примеры ФМП: производственные функции (Кобба – Дугласа, Леонтьева, CES), функции полезности. Понятия линий и поверхностей уровня.

Предел ФМП (определения по Коши и Гейне). Примеры.

20.11.2024

Лекция 20. Предел ФМП по направлению, повторные пределы функции двух переменных. Примеры. Теорема о пределе функции двух переменных в полярных координатах.

Непрерывность ФМП в точке. Локальные свойства непрерывных ФМП: о сохранении знака, о промежуточном значении, непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте (теоремы Вейерштрасса). Открытые и замкнутые множества, задаваемые системами уравнений и неравенств непрерывных ФМП. Бюджетное множество. Непрерывная функция полезности на бюджетном множестве.

Понятие частных производных ФМП, предельный продукт производственной функции по фактору. Дифференцируемость ФМП. Необходимое условие дифференцируемости.

25.11.2024

Лекция 21. Достаточное условие дифференцируемости ФМП. Дифференциал ФМП и его применение к приближенным вычислениям. Инвариантность формы 1-го дифференциала ФМП. Дифференцируемость сложной ФМП. Примеры.

Формула конечных приращений Лагранжа для ФМП.

Понятие касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности уровня. Уравнения касательной плоскости и нормальной прямой. Геометрический смысл дифференциала.

27.11.2024

Лекция 22. Производная ФМП по направлению. Градиент. Основные свойства градиента.

Примеры применения градиента: нахождения соотношения изменений факторов для достижения наибольшего роста выпуска продукции, приближенное нахождение точек локального экстремума методом градиентного спуска.

Частные производные и дифференциалы высших порядков ФМП. Теорема о равенстве смешанных производных.

Общий вид дифференциала m -го порядка ФМП n переменных. Дифференциал 2-го порядка как квадратичная форма.

Формула Тейлора для ФМП.

2.12.2024

Лекция 23. Необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой ФМП. Понятие стационарной точки ФМП. Понятие седловой точки ФМП. Сведения из теории квадратичных форм (определенность квадратичных форм).

Сведения из теории квадратичных форм (определенность квадратичных форм, критерий Сильвестра). Достаточное условие существования локального экстремума ФМП. Примеры.

9.12.2024

Лекция 24. Задачи на локальный экстремум: аппроксимация и метод наименьших квадратов, задача об оптимальном размещении объекта (дискретный случай), метод центра тяжести.

Отображения из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^m , векторная функция. Непрерывное отображение. Дифференцируемое отображение. Понятие производной Фреше и матрицы Якоби дифференцируемого отображения. Примеры.

Неявная функция, задаваемая одним уравнением. Теорема о существовании, единственности и дифференцируемости неявной функции.

11.12.2024

Лекция 25. Примеры исследования на экстремум неявных функций. Неявные производственные функции. Неявная векторная функция (отображение), задаваемая системой уравнений. Теорема о существовании, единственности и дифференцируемости неявной векторной функции. Примеры. Вычисление матрицы Якоби отображения, заданного неявно.

Понятие регулярного отображения. Теорема о локальном существовании обратного отображения и матрице Якоби обратного отображения. Выделение главной части в обратном отображении. Примеры.

Приближенные методы решения нелинейных систем: метод Ньютона. Примеры.

16.12.2024

Лекция 26. Приближенное нахождение стационарных точек ФМП методом Ньютона. Примеры.

Выпуклые и вогнутые ФМП: определения и свойства, критерий выпуклости (вогнутости) для непрерывно дифференцируемых функций, критерий выпуклости (вогнутости) для дважды непрерывно дифференцируемых функций. Примеры.