Программы учебных дисциплин «Математический анализ-1», «Математический анализ-2»

Образовательная программа «Экономика и статистика»

Форма обучения: очная

Степень: бакалавр

Разработчики	А.Е. Лепский, проф. деп. математики ФЭН
Число кредитов	15
Контактная работа (час.)	190
Самостоятельная работа (час.)	380
Курс, образовательная программа	1 курс, ОП «Экономика и статистика»
Формат изучения дисциплины	без использования онлайн курса

1. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Тема (раздел дисциплины)	**Объем в часах**			**Планируемые результаты обучения (ПРО), подлежащие контролю**	**Формы контроля**
	лк	см	onl/ср		
Математический анализ-1					
Тема 1. Непрерывные и дифференцируемые функции одной переменной	30	30	136	Исследует непрерывные и дифференцируемые функции одной переменной	письменная работа на 90–120 минут
Тема 2. Непрерывные и дифференцируемые функции многих переменных	24	18	88	Исследует непрерывные и дифференцируемые функции многих переменных	письменная работа на 90–120 минут, домашнее задание
Математический анализ-2					
Тема 3. Экстремумы функций многих переменных. Интегрирование функций одной переменной	22	20	76	Исследует функции многих переменных на экстремум; решает задачи, связанные с интегрированием функций одной переменной	письменная работа на 90–120 минут
Тема 4. Интегрирование функций многих переменных. Ряды	24	28	80	Решает задачи, связанные с интегрированием функций многих переменных; решает задачи на сходимость, суммирование и разложение в ряд	письменная работа на 90–120 минут, домашнее задание
Часов по видам учебных занятий:	**94**	**96**	**380**		
Итого часов:	**570**				

Формы учебных занятий:

лк – лекции в аудитории;

см – семинары/ практические занятия/ лабораторные работы в аудитории;

onl – лекции или иные виды работы студента с помощью онлайн-курса;

ср – самостоятельная работа студента.

1.1. Содержание разделов дисциплины

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-1

Тема 1. Непрерывные и дифференцируемые функции одной переменной

Множества и операции над ними (объединение, пересечение, разность). Объединение и пересечение семейств множеств. Основные тождества алгебры множеств. Понятие о числовых множествах.[1]

Упорядоченные пары и декартово произведение множеств. Соответствия и отображения (функции). Способы задания функций. Образы и прообразы точек и множеств при заданном отображении. Композиция функций. Обратимость функции и обратная функция. Сюръекция, инъекция, биекция.

Экономические примеры. Язык множеств, соответствий и функций как универсальный язык построения моделей в науке, в т.ч. в экономике, [10].

Множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Принцип математической индукции. Последовательности как функции, определенные на множестве натуральных чисел или его начальном отрезке. Числовые последовательности. Последовательности, заданные рекуррентно.

Линейные рекуррентные последовательности. Арифметические и геометрические прогрессии. Биномиальные коэффициенты и формула бинома Ньютона. Неравенство Бернулли.

Монотонные последовательности. Ограниченные и неограниченные последовательности.

Экономические примеры. Дискретные финансовые потоки; формулы начисления простых и сложных процентов, формула аннуитета, [7].

Числовые множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$. Множество $\mathbb{R}$ действительных чисел. Аксиома непрерывности (полноты). Числовая прямая. Отрезки, интервалы и другие промежутки числовой прямой. Окрестности. Длина отрезка на числовой прямой.

Верхние и нижние грани, точные верхние и нижние грани числовых множеств. Принципы супремума и инфимума.

Понятие о мощности множества. Конечные, счетные и несчетные множества. Счетность счетного объединения счетных множеств. Счетность множества конечных последовательностей натуральных чисел. Теорема Кантора. Несчетность множества действительных чисел.

Числовые функции одной действительной переменной. Четные, нечетные, периодические функции. Области возрастания и убывания, экстремумы. Монотонные и ограниченные функции. Основные элементарные функции. Элементарные функции. Естественная область определения. Область значений.

Многочлены. Деление многочленов с остатком. Разложение многочленов на множители.

Рациональные функции. Представление рациональной функции в виде суммы простых дробей.

---

[1] Мелким шрифтом выделен материал, который изучается при наличии резерва времени.

Тригонометрические и обратные тригонометрические функции: основные соотношения.

Экономические примеры: стандартные функции, используемые в экономических моделях и в эконометрике; функции полезности (благосостояния) и задачи их оптимизации, функции спроса Торнквиста, функции общего и среднего дохода, прибыли фирмы, функции общих и средних издержек, [5,8,9].

Элементы математической логики. Понятие о формальном математическом языке. Термы, элементарные высказывания, логические связки и кванторы. Высказывания общего вида. Логическое следствие и эквивалентность. Вывод высказывания из множества высказываний. Математические утверждения (аксиомы, теоремы и т. д.) с логической точки зрения. Необходимые и достаточные условия. Прямая, обратная, противоположная прямой и противоположная к обратной теоремы, взаимосвязь между ними.

Экономические примеры: аксиоматический подход в экономике, [8].

Предел последовательности. Единственность предельного значения. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, последовательности с пределами $\pm\infty$. Ограниченность последовательности, имеющей предел.

Арифметические свойства пределов последовательностей. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности. Теорема «о двух полицейских». Предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Экономические примеры. Экономическая интерпретация числа e: предельный случай непрерывного начисления процентов, [5].

Критерий Коши сходимости последовательности. Понятие фундаментальной последовательности. Расходимость последовательности гармонических чисел.

Подпоследовательности и частичные пределы. Лемма о вложенных отрезках. Теорема Больцано — Вейерштрасса. Нижний и верхний пределы последовательности. Лемма Гейне-Бореля.

Понятие предела функции по Гейне и Коши. Пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Односторонние пределы.

Свойства пределов функции: локальные, арифметические, связанные с неравенствами. Замена переменных в пределе. Первый и второй замечательные пределы и их следствия.

Экономические примеры. Предельные значения параметров в различных экономических и финансовых моделях (формула аннуитета, производственные функции, функции полезности и др.), [7,10,11].

Символы Ландау (O-o-символика). Эквивалентность функций. Таблица основных эквивалентностей. Свойства отношения эквивалентности. Использование эквивалентностей при вычислении пределов.

Асимптоты функции. Теорема о существовании наклонной асимптоты.

Экономические примеры. Асимптотическое поведение экономических показателей в различных моделях. Асимптоты функций спроса Торнквиста, асимптотическое поведение производственной функции в различных моделях роста. Правило семидесяти, [9,10].

Понятие непрерывной функции. Точки разрыва и их классификация. Локальные свойства непрерывных функций: локальная ограниченность непрерывных функций, сохранение знака непрерывной функцией, непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций. Теорема Вейерштрасса об ограниченности и о достижимости точных граней непрерывной на отрезке функции.

Теорема Коши о нулях непрерывной функции. Метод деления отрезка пополам. Задача локализации корней с заданной точностью. Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции. Теорема о существовании обратной непрерывной функции к непрерывной строго монотонной функции.

Экономические примеры. Обратные функции спроса и предложения, [7,9,10].

Определение производной функции. Геометрический и экономический смысл производной. Вычисление производной по определению. Таблица производных простейших элементарных функций.

Правила нахождения производной. Производная композиции функций. Замкнутость класса элементарных функций относительно дифференцирования.

Производная параметрически заданной функции. Производная функции, заданной неявно. Производная обратной функции.

Логарифмическая производная и эластичность функции.

Односторонние и бесконечные производные.

Экономические примеры. Предельный доход фирмы, предельная производительность труда и др. Эластичность функций спроса от дохода. Процентная ставка как относительная скорость изменения функции дохода при непрерывном начислении процентов. Соотношения между предельным и средним доходом фирмы, между предельными и средними издержками, [7,9,10,11].

Понятие дифференцируемой функции и дифференциала. Геометрический смысл дифференциала. Применение дифференциала для приближенных вычислений. Теорема о связи производной и дифференцируемой функции. Правила дифференцирования в терминах дифференциалов. Инвариантность формы записи 1-го дифференциала.

Необходимое условие существования экстремума дифференцируемой функции (теорема Ферма). Теорема Лагранжа о среднем значении и ее следствия: формула конечных приращений, условие постоянства функции, применение к доказательству неравенств.

Теорема Коши о среднем значении. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей [0/0] и [∞/∞].

Экономические примеры. Задачи максимизации функции полезности и минимизации затрат (случай одной переменной), [7 – 12].

Производные и дифференциалы высших порядков. Производные n-го порядка параметрически заданной и неявно заданной функций. Формула Лейбница для n-й производной произведения двух функций.

Понятие многочлена Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, в форме Пеано. Единственность представления формулой Тейлора. Многочлены Маклорена основных элементарных функций.

Достаточные условия экстремума.

Экономические примеры. Задачи максимизации функции полезности и минимизации затрат (случай одной переменной), продолжение. Уточненное правило семидесяти, [7 – 12].

Исследование функции с помощью производных. Исследование функции на монотонность: определение монотонной функции и критерий монотонности дифференцируемой функции. Исследование функции на экстремум: необходимое условие экстремума (теорема Ферма), 1-е достаточное условие экстремума (в терминах изменения знака первой производной), 2-е достаточное условии экстремума (в терминах старших производных). Понятие выпуклой (вогнутой) дифференцируемой функции и точек перегиба. Достаточное условие выпуклости, достаточное условие существования точки перегиба. Свойства выпуклых/вогнутых функций. Неравенство Йенсена.

Экономические примеры. Выпуклые задачи максимизации функции полезности и минимизации затрат (случай одной переменной), продолжение, [7 – 12].

Тема 2. Непрерывные и дифференцируемые функции многих переменных

Множество n-мерных строк $\mathbb{R}^n$, сложение строк и умножение строк на вещественные числа. Норма элемента в $\mathbb{R}^n$, геометрическая интерпретация нормы. Декартовы координаты точек плоскости и пространства. Расстояние между элементами в $\mathbb{R}^n$, как норма их разности.

Окрестность точки. Ограниченные множества. Внутренние и граничные точки множества. Граница множества. Открытые, замкнутые множества. Компакты. Открытые и замкнутые множества, задаваемые системами уравнений и неравенств.

Последовательности в $\mathbb{R}^n$ и их пределы.

Основные свойства открытых и замкнутых множеств. Характеризация компактов. Лемма Больцано-Вейерштрасса в n-мерном случае.

Экономические примеры. Бюджетное множество, технологическое множество, [7].

Векторные функции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Числовые функции $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Понятие линий и поверхностей уровня числовой функции нескольких действительных переменных. Элементарные функции нескольких действительных переменных. Естественные области определения.

Прямые и гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$.

Выпуклые множества. Выпуклая оболочка множества. Теоремы об отделимости.

Экономические примеры. Многомерные экономические модели. Задачи классификации, метод опорных векторов в задачах кредитного скоринга (постановка задачи), [7 – 12].

Предел векторной функции. Теорема о связи предела функции с пределами ее компонент. Предел по направлению. Теорема о вычислении предела функции двух переменных в полярных координатах.

Непрерывные векторные функции. Теорема о покоординатной непрерывности непрерывной векторной функции. Непрерывность элементарных числовых нескольких действительных переменных. Непрерывные кривые и поверхности и их параметризации. Линейно связные множества.

Свойства непрерывных функций. Теорема о прообразах открытых и замкнутых множеств при непрерывном отображении.

Экономические примеры. Производственная функция (Кобба-Дугласа, Леонтьева и др.), функции полезности, [7 – 12].

Свойства функций, непрерывных на компактном множестве: теорема Вейерштрасса, теорема об образе компактного множества при непрерывном отображении. Образ линейно связного множества.

Понятие равномерно непрерывной на множестве функции. Теорема Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции на компактном множестве.

Экономические примеры. Достижимость максимальных и минимальных значений функций полезности при естественных ограничениях, [7 – 12].

Частные производные числовых функций нескольких действительных переменных. Эластичность функции нескольких действительных переменных по фиксированной переменной. Понятие дифференцируемой функции нескольких действительных переменных; первый дифференциал. Необходимое условие дифференцируемости функции. Примеры дифференцируемых и недифференцируемых функций. Достаточное условие дифференцируемости. Обобщение: дифференцируемость (по Фреше) векторной функции (отображения) из $X \subseteq \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, понятие производной и дифференциала векторной функции.

Экономические примеры. Интерпретация частных производных производственных функций. Пример производной производственной сложной функции (капитал и труд зависят от времени). Производственные функции и функции полезности со свойством CES, [7 – 12].

Теорема о дифференцируемости сложной векторной функции. Правило вычисления дифференциала сложной функции. Свойство функториальности матрицы Якоби, инвариантность первого дифференциала.

Понятие касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности уровня. Геометрический смысл дифференциала.

Градиент и его основные свойства. Производная по направлению.

Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции многих переменных. Понятие стационарных и седловых точек.

Экономические примеры. Задачи максимизации функции полезности и минимизации затрат (случай нескольких переменных), [7 – 12].

Частные производные функции многих переменных высших порядков. Теорема об условиях равенства смешанных производных. Дифференциал второго порядка функции многих переменных. Матрица Гессе. Дифференциалы высших порядков.

Формула Тейлора для функции многих переменных с остаточным членом в форме Лагранжа и в форме Пеано.

Достаточное условие экстремума.

Экономические примеры. Задачи максимизации функции полезности и минимизации затрат (случай нескольких переменных), продолжение [7 – 12].

Основные задачи безусловной оптимизации. Метод наименьших квадратов. Понятие об уравнении регрессии.

Экономические примеры. Задачи максимизации функции полезности и минимизации затрат (случай нескольких переменных), продолжение; дискретная задача о пространственном оптимальном размещении объектов (магазинов, складов и т.д.), эконометрические приложения (уравнение линейной регрессии), [7 – 12].

Понятие неявно заданной функции. Теорема о существовании, непрерывности и дифференцируемости неявной функции, задаваемой одним уравнением (схема доказательства). Понятие неявно заданной векторной функции и теорема об её существовании и дифференцируемости (без доказательства). Вычисление эластичности неявно заданных функций.

Теорема о гладкой зависимости безусловных экстремумов от параметров. Теорема об огибающей для безусловных экстремумов.

Экономические примеры. Пример неявной производственной функции и ее частных производных, эластичность замещения, [7 – 12].

Понятие регулярного отображения и теорема о существовании локально обратимого отображения.

Условия зависимости системы числовых функций.

Экономические примеры. Модель национального дохода, обратные задачи в моделях рынка, [7 – 12].

Однородные функции. Однородность частных производных однородной функции. Теорема Эйлера об однородных функциях. Кривые Энгеля для однородной функции полезности. Поверхности уровня однородных функций. Поверхности уровня однородных функций.

Экономические примеры. Производственная функция Кобба-Дугласа. Приложения однородных функций в теории потребления. Однородные CES-функции, [7 – 12].

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ-2

Тема 3. Экстремумы функций многих переменных. Интегрирование функций одной переменной

Задача на условный экстремум для функции многих переменных: определение точки условного экстремума функции многих переменных при наличии связей в виде равенств. Метод подстановки решения задачи на условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Необходимое условие существования условного экстремума для дифференцируемой функции и дифференцируемых функций уравнений связи.

Экономические примеры. Экономический смысл множителей Лагранжа. Понятие теневых цен. Задачи оптимизации в экономике, [7 – 12].

Достаточное условие существования условного экстремума для дифференцируемой функции и дифференцируемых функций уравнений связи. Условия связи дифференциалов.

Теорема об окаймляющем гессиане.

Нахождение наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на компакте, метод параметризации границ.

Экономические примеры. Задачи выбора товаров, максимизирующего функцию полезности при бюджетном ограничении; двойственная (хиксианская) задача минимизации затрат потребителя на приобретение набора благ при условии ограничений снизу на полезность наборов, спрос Хикса; задача минимизации издержек при заданном объеме выпуска продукции, [7 – 12].

Зависимость безусловных и условных экстремумов от параметров. Теорема об огибающей для условных экстремумов.

Экономические примеры. Лемма Хоттелинга, [12].

Элементы выпуклого анализа. Свойства выпуклых (вогнутых) функций: о выпуклости области определения, о выпуклости положительной линейной комбинации выпуклых функций, о непрерывности выпуклых функций, о максимуме (минимуме) выпуклых (вогнутых) функций. Критерии выпуклости непрерывно дифференцируемой функции. Экстремальные свойства выпуклых функций.

Экономические примеры. Выпуклые задачи в экономике, [8].

Задачи оптимизации с ограничениями типа неравенств.

Условия Каруша — Куна — Таккера.

Экономические примеры. Выпуклые задачи в экономике (продолжение). Метод опорных векторов в задачах кредитного скоринга (решение задачи), [8].

Многозначные отображения. Теорема Какутани о неподвижной точке. Теорема Неймана о минимаксе. Седловые точки. Связь с условиями Куна-Таккера.

Экономические примеры. Теоретико-игровой подход в экономике, [8,10,12].

Понятие первообразной и неопределенного интеграла функции. Свойства неопределенного интеграла. Таблица неопределенных интегралов основных функций. Замена переменной в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Примеры.

Экономические примеры. Задача о нахождении функции с заданной характеристикой изменения роста (населения, производства продукции и пр.), изменения цены, [7 – 12].

Интегрирование рациональных функций: понятие рациональной дроби, правильная и неправильная рациональные дроби, выделение целой части в неправильной дроби, понятие простых дробей, теорема о разложении на множители многочлена с действительными коэффициентами, теорема о разложении правильной дроби в сумму простых дробей, интегрирование простых дробей.

Понятие рационализируемого интеграла. Интегрирование рационально-тригонометрических функций, частные случаи интегрируемости рационально-тригонометрических функций. Интегрирование некоторых классов иррациональных функций.

Определенный интеграл. Определение определенного интеграла Римана: понятия разбиения, мелкости разбиения, интегральной суммы. Необходимое условие интегрируемости функции. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу. Примеры неинтегрируемых функций.

Экономические примеры. Экономические модели: инвестиции и капитал, чистая приведенная стоимость (NPV) инвестиций в непрерывном случае, [7 – 12].

Некоторые классы интегрируемых функций: интегрируемость непрерывных функций, интегрируемость монотонных ограниченных функций. Критерий интегрируемости по Лебегу, понятие множества меры нуль. Примеры вычисления определенных интегралов по определению. Свойства определенных интегралов. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства: условия непрерывности и дифференцируемости. Теорема о существовании первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Формулы замены переменной и интегрирования по частям для определенного интеграла.

Экономические примеры. Экономические модели: чистая приведенная стоимость (NPV) инвестиций в бессрочном случае, [7 – 12].

Некоторые приложения определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора в полярных координатах. Понятие спрямляемой кривой и ее длины. Вычисление длины спрямляемой кривой: а) заданной параметрически; б) заданной функцией в декартовых координатах; в) заданной функцией в полярных координатах.

Несобственные интегралы. Признаки сходимости несобственных интегралов.

Интегралы, зависящие от параметров.

Элементы вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

Экономические примеры. Задачи оптимизации функционалов в экономике, [8,12].

Тема 4. Интегрирование функций многих переменных. Ряды

Кратные интегралы. Мотивация введения кратного интеграла: геометрические и экономические задачи. Понятие измеримого множества и его меры в $\mathbb{R}^n$ (меры Жордана), свойства меры Жордана. Понятие множества меры нуль. Критерий измеримости множества. Понятие кратного интеграла по измеримому множеству (разбиение множества, мелкость разбиения, выборка точек в разбиении, интегральная сумма). Критерии интегрируемости, классы интегрируемых функций. Свойства кратных интегралов. Вычисления кратных интегралов с помощью повторных. Примеры. Замена переменных в кратном интеграле.

Экономические примеры. Экономические задачи (объем выпуска при заданной пространственной плотности размещения производства, объем трафика при заданной плотности распределения источников и т.д.), [7 – 12].

Числовые ряды. Частичные суммы, сходимость ряда и его сумма. Необходимое условие сходимости и его отрицание. Примеры. Свойства сходящихся числовых рядов. Критерий Коши сходимости числового ряда и его отрицание. Гармонический ряд.

Абсолютная и условная сходимость рядов. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами: признак ограниченности, признаки сравнения, интегральный признак, признак Даламбера, радикальный признак Коши. Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница, оценка остатка.

Экономические примеры. Задача о нахождении рыночной цены бессрочной облигации. Задача об оценке прибыли от инвестиций, [7].

Функциональные последовательности и ряды. Поточечная, на множестве и равномерная сходимости последовательностей и рядов. Условия равномерной сходимости функциональных рядов, признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов: непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование.

Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости, формула Коши-Адамара. Равномерная сходимость степенного ряда, его дифференцируемость и интегрируемость. Ряд Тейлора. Условия представимости функции своим рядом Тейлора. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора. Примеры. Приложения рядов к приближенным вычислениям.

2. ОЦЕНИВАНИЕ

Контроль знаний студентов включает формы текущего, промежуточного и итогового контроля.

Все формы контроля проводятся в письменной форме. Возможно проведение форм контроля онлайн с использованием той или иной формы прокторинга. Если форма контроля проводится с помощью прокторинга, то преподаватель оставляет за собой право применить процедуру защиты к некоторым работам.

Текущий контроль включает в себя контрольные работы и домашние задания. Промежуточный и итоговый контроль – экзаменационные работы.

семестр	формы контроля	число заданий	время выполнения
осенний	контрольная работа №1	5	60–80 минут
	контрольная работа №2	5	60–80 минут
	домашнее задание №1	варьируется	5–8 недель
	экзамен	6	40–120 минут
весенний	контрольная работа №3	5	60–80 минут
	контрольная работа №4	5	60–80 минут
	домашнее задание №2	варьируется	5–8 недель
	экзамен	6	40–120 минут

Точное время выполнения уточняется до начала контрольной работы или экзамена. Время, отводимое на экзаменационную работу, зависит от количества зачтенных задач (см. ниже).

Полное правильное решение задания контрольной работы оценивается в один балл. В случае неполного решения оценка может дробиться.

По итогам контрольных работ студенты освобождаются от решения некоторых задач экзамена с зачетом по этим задачам максимального балла:

Количество баллов (N), полученное студентом за контрольные работы	Количество задач экзамена, от выполнения которых студент освобождается
$3 \leq N < 4$	1
$4 \leq N \leq 5$	2

Номера засчитанных задач отсчитываются подряд от первой для контрольных работ №1 и №3, от четвертой для контрольных работ №2 и №4.

Каждое задание экзамена оценивается в 1,5 балла. Часть этой оценки (какая именно – уточняется перед экзаменом) может выставляться за ответ на теоретическую часть задания, но при условии, что решена в основном практическая часть этого же задания.

Таким образом, на экзамене студент может набрать до 9 баллов включительно.

Одним из элементов контроля являются домашние задания, которые выполняются студентами самостоятельно в течение нескольких недель и сдаются на проверку преподавателям или учебным ассистентам к определенному сроку. Работы, сданные с нарушением сроков, не проверяются и считаются несданными. Количество несданных задач домашнего задания пересчитывается в сумму баллов (правило пересчета объявляется в момент выдачи домашнего задания), которая вычитается из суммы набранных на экзамене условных единиц.

Первичное количество баллов (N), полученное студентом на экзаменационной работе и за вычетом штрафных баллов за домашнее задание, округляется по правилу арифметического округления (если дробная часть меньше 0.5, то в меньшую сторону, в противном случае – в большую) до итоговой **девятибалльной** оценки.

При онлайновой форме контроля преподаватель оставляет за собой право применить процедуру защиты некоторых работ.

Студенты, набравшие не менее 7 (итоговых) баллов, имеют право на получение 1-2 бонусных баллов (до 10-ти итоговых баллов) по результатам дополнительного собеседования (решения дополнительных задач повышенной сложности, доказательства математических теорем курса и пр.).

Кроме проверяемого письменного домашнего задания, как правило, на каждом семинарском занятии выдается текущее домашнее задание. Выполнение текущего домашнего задания не является формой контроля и не оценивается.

Пересдача контрольных работ и выполнение студентами контрольных работ в индивидуальные сроки не производится – студент имеет возможность «добрать» неполученные на контрольной работе баллы (по любой причине: уважительной или нет) на промежуточном или итоговом контроле.

Экзаменационная работа является блокирующей. Первая пересдача проходит по правилам и темам проведения экзаменационной работы в периоды пересдач, установленные в НИУ ВШЭ. Вторая пересдача комиссии – по правилам, установленным комиссией.

3. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

Пример варианта первого (осенний семестр) экзаменационного задания

Найдите пределы (1,2):

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{6-x^2}}{\sqrt[3]{x^2+1}+\sqrt[3]{1-3x^2}}$;   2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}-\sqrt[4]{x+14}}{\log_2(6x+4)-2^x}$.

3. Дана функция $y=x+\dfrac{|x+2|+x}{x^2+4x+3}$. Найдите: а) все асимптоты графика функции; б) все точки разрыва и укажите их характер. Постройте эскиз графика функции.

4. Запишите формулу Тейлора для функции $y=(x^2+2x)\sin^2(\pi x/2)$ в окрестности точки $x_0=-1$ с $o\left((x+1)^7\right)$. Чему равно $y^{(6)}(-1)$?

5. Найдите все точки поверхности $2xy-3xz+4z^2=1$, в которых касательная плоскость параллельна плоскости $2x+y-z=\sqrt{10}$.

6. Дано отображение $f:(x,y,z)\mapsto(u,v,w)$, $u=xy+yz$, $v=yz+xz$, $w=xyz$. Определите: а) является ли это отображение локально обратимым в окрестности точки $(x,y,z)=(1,1,1)$. Если отображение f локально обратимо в окрестности точки $(x,y,z)=(1,1,1)$, то найдите: б) разложение обратного отображения по формуле Тейлора 1-го порядка в окрестности точки $f(1,1,1)$.

7. Сформулируйте необходимые и достаточные условия существования экстремума ФМП. Исследуйте на экстремум функцию $f = 2y + 2z + e^{x^2} + x^2 + 5y^2 + z^2 - 4xy + 2yz$.
8. Сформулируйте достаточное условие выпуклости ФМП. Установите характер выпуклости функции $u = x^2 - 4xyz + 5y^3 + 6z^2$ в окрестности точки $(1,1,-1)$.

Пример варианта второго (весенний семестр) экзаменационного задания

1. Найдите множество значений функции полезности $f = 3x - y - 2z$ на бюджетном множестве D: $y \ge 1,\ 1 \le x \le 3,\ z \ge 1,\ 2x + 4y + 3z \le 11$. Сформулируйте соответствующую теорему.
2. В задаче максимизации дохода $f = 3x + 4y + 5z$ при ресурсных ограничениях $\begin{cases} 5x^2 + y^2 = 5, \\ 5y^2 + z^2 = 25 \end{cases}$ найдите приближенное процентное изменение максимального дохода, если запасы ресурсов (правые части ограничений) увеличились на 5% и 8% соответственно.
3. Найдите интеграл $\int_0^{\pi/2} (3\cos^2 x - 2\sin x)\sin x\, dx$.
4. Исследуйте сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{8x^4 + 3x + 1} + \sqrt{4x^2 + 1}}{\sqrt[4]{16x^{10} + x + 1}} dx$. Сформулируйте соответствующий признак сходимости.
5. Найдите методом центра тяжести оптимальное размещение магазина в области $D: y^2 - 1 \le x \le 1$, если плотность распределения покупателей в этой области равна $\gamma = x + 1$.
6. Найдите нормирующий множитель $a > 0$ и вероятность $P\{X > Y > 0\}$, если плотность совместного распределения случайных величин X и Y равна $f(x, y) = a \begin{cases} 2 - x^2 - y^2, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D, \end{cases}$ где $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$.
7. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n - 1}{\sqrt[3]{2n + 3}} \left(\ln(1 + n) - \ln n \right)$. Сформулируйте соответствующий признак сходимости.
8. Найдите область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n + 1}} \left(\frac{3x - 1}{2x + 4} \right)^n$. Сформулируйте соответствующую теорему.

4. РЕСУРСЫ

4.1. Рекомендуемая основная литература

1) Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа. — М.: Физматлит, 2000 (или любое другое издание). [электронные ресурсы библиотеки ВШЭ]

2) Кудрявцев Л. Д. и др. Сборник задач по математическому анализу. Т.1-3. — М.: Физматлит, 2003 (или любое другое издание).

3) Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1997 (или любое другое издание). [электронные ресурсы библиотеки ВШЭ]

4.2. Рекомендуемая дополнительная литература

4) Лепский А.Е. Краткий курс лекций https://drive.google.com/file/d/1mLSA-25wWZhwrxk7zOFFENc4seTiMfDG/view

5) Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г. Математический анализ и дифференциальные уравнения. — М.: Академия, 2010.

6) Бурмистрова Е. Б., Лобанов С. Г. Линейная алгебра, дифференциальное исчисление функций одной переменной. — М.: Академия, 2010.

7) Chiang Alpha C. Fundamental methods of mathematical economics. — McGrow-Hill, 1984.

8) Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. Айрис-Пресс, 2002

9) Jacques I. Mathematics for economics and business. — Prentice Hall, 2006.

10) Sydsaeter K., Hammond P. Mathematics for economic analysis. Prentice-Hall International, Inc., 1995.

11) Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н. Математические методы в экономике. — М.: МГУ им М. В. Ломоносова, изд-во «Дело и сервис», 1999.

12) Takayama A. Mathematical economics. Cambridge University Press, 1993.