

**Темы лекций и текущие домашние задания  
по курсу «Математический анализ»  
ОП «Экономика и статистика», ФЭН НИУ ВШЭ, 2023/24 уч. год**

Задачники:

1. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 1. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
3. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 2. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.

**1 модуль**

**04.09.2022**

**Лекция 1.** Структура курса «Математический анализ» и особенности учебного процесса, организационные вопросы.

Понятие множеств, отношения и операций над ними. Числовые множества  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$ , множество простых чисел, множество алгебраических чисел. Связь числовых множеств с возможностью решения различных алгебраических уравнений в этих множествах. Плотность  $\mathbb{Q}$  в  $\mathbb{R}$ . Числовая прямая, взаимно однозначное соответствие между множествами  $\mathbb{R}$  и числовой прямой. Отрезок, интервал, полуинтервал, бесконечные промежутки. Длина отрезка на прямой. Окрестность точки на прямой.

**Семинар.** Элементарная математика: построение графиков функций и исследование простых свойств функций: область определения, множество значений, образ множества при данном отображении и др. Преобразование графиков.

**ДЗ.** [1], §7: 26(2), 28(6), 38(1), 56(2), 57(3), 108(1), 200(1).

**07.09.2023**

**Лекция 2.** Декартово произведение множеств.

Понятие равномоощных множеств. Конечные, счетные и несчетные множества, континуальные множества. Счетность множеств  $\mathbb{Z}$  и  $\mathbb{Q}$ . Примеры и свойства счетных множеств.

Понятия ограниченного сверху, снизу и просто ограниченного числового множества. Понятия верхней и нижней граней. Определение точных верхней и нижней граней. Примеры. Теорема о существовании ТГ ограниченного множества (схема доказательства). Теорема об отделимости числовых множеств.

Определение отображения (функции) и связанных понятий: область определения, множество значений, образ множества, прообраз множества.

**Семинар.** Элементарная математика: построение графиков функций и исследование простых свойств функций. Грани числовых множеств, точные грани.

**ДЗ.** [1], §7: 63(1,4), 67(4), 68(1,2), 95(2), 147(2 + эскиз графика), 250(1), 275(1).

**11.09.2023**

**Лекция 3.** Типы отображений: инъективное, сюръективное, биективное. Примеры. Операции над функциями: арифметические, композиция функций (сложная функция). Примеры. Основные элементарные функции. Способы задания функций: аналитический, табличный, графический, описательный, неявный и др. График функции и эскиз графика.

Ограниченные и неограниченные функции. ТВГ и ТНГ функции на множестве. Наибольшее (максимальное) и наименьшее (минимальное) значения функции на множестве (экстремальные значения). Примеры.

Понятие обратной функции. Свойства обратной функции. Примеры.

Четные и нечетные функции. Примеры.

Монотонные функции. Примеры

**Семинар.** Исследование функций на четность/нечетность, монотонность, обратные функции.

ДЗ. [1], §7: 124(1,3 + эскиз графика), 126(1), 138(1), 155(1 + эскиз графика), 156(2), 187(3), 200(1).

#### 14.09.2023

**Лекция 4.** Периодические функции. Примеры.

Примеры «экономических» функций: 1) функции спроса и предложения; 2) функции Торнквиста (взаимосвязь между спросом и доходом для различных категорий товара).

Последовательность. Способы задания последовательностей: явный, рекуррентный, описательный, графический. Примеры: формулы начисления процентов по вкладам: простые проценты, сложные проценты; непрерывные проценты.

Понятие предела последовательности.

Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, последовательности с пределами  $\pm\infty$ . Примеры. Свойства бесконечно малых и бесконечно больших последовательностей. Ограниченность последовательности, имеющей предел. Единственность предельного значения.

**Семинар.** Исследование функций на периодичность.

Последовательности: исследование на монотонность и ограниченность, нахождение точных граней последовательностей. Предел последовательности. Доказательство существования и несуществования предела последовательности.

ДЗ. [1], §7: 203(4), 215(1), 225(1), 249(1), 250(1), 275(1), 299(1); §8: 2(3), 8(1), 13(3).

#### 18.09.2023

**Лекция 5.** Арифметические свойства пределов. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Примеры (в том числе пределы последовательностей  $a^{1/n}$  и  $n^{1/n}$ ).

Монотонные и ограниченные последовательности. Теорема о существовании предела монотонной ограниченной последовательности. Примеры (в том числе пределы последовательностей

$\frac{a^n}{n!}$ ,  $a > 0$ ;  $\frac{n^k}{n!}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ ,  $x_1 > 0$ ,  $a > 0$ ).

**Семинар.** Нахождение пределов последовательности. Переход к пределу в неравенствах.

ДЗ. [1], §8: 36(1), 39(1), 44(1), 45(1), 53(1), 57(2), 59.

#### 21.09.2023

**Лекция 6.** Предельный случай непрерывного начисления процентов на капитал. Предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$ .

Понятие подпоследовательности и частичных пределов. Верхний и нижний пределы последовательности. Примеры.

Понятие последовательности вложенных отрезков и стягивающихся отрезков.

Теорема об отделимости числовых множеств (аксиома непрерывности).

Лемма Кантора о вложенных отрезках.

Теорема (Больцано – Вейерштрасса) о существовании сходящейся подпоследовательности у ограниченной последовательности.

Понятие фундаментальной последовательности. Свойства фундаментальной последовательности. Критерий Коши сходимости последовательности. Критерий расходимости

последовательности. Пример (расходимость последовательности гармонических чисел). Асимптотика гармонических чисел.

**Семинар.** Предел последовательности, связанный с числом  $e$ . Подпоследовательности, частичные пределы, верхний и нижний пределы.

**ДЗ.** [1], §8: 58(3), 59, 64(2), 74(1), 175(2,3), 117(3), 183(1).

### 25.09.2023

**Лекция 7.** Понятие предела функции по Гейне и Коши. Примеры.

Односторонние пределы. Пределы на бесконечности и бесконечные пределы. Примеры.

Свойства пределов функции: локальные, связанные с неравенствами. Бесконечно малые функции и их свойства. Арифметические свойства пределов функции.

Пределы монотонной функции. Замена переменной при вычислении пределов. Примеры. Первый замечательный предел. Следствия из первого замечательного предела.

**Семинар.** Предел функции. Односторонние пределы. 1-й замечательный предел.

**ДЗ.** [1], §9: 1(2), 20(4), 22(3), 25(5), 26(3), 27(1), 29(5), 30(4,6).

### 28.09.2023

**Лекция 8.** Второй замечательный предел.

Асимптоты функции: вертикальные и наклонные асимптоты. Теорема о существовании наклонной асимптоты. Примеры.

Понятие непрерывной функции. Непрерывность основных элементарных функций. Примеры. Односторонняя непрерывность.

Точки разрыва и их классификация. Пример.

**Семинар.** Предел функции. 2-й замечательные пределы. Асимптоты. Непрерывность функции. Точки разрыва.

**ДЗ.** [1], §9: 31(4), 36(1,5), 40(1); §10: 5(2), 56(2), 57(5), 58(4); §11: 2(5+эскиз графика), 3(2+эскиз графика).

### 2.10.2023

**Лекция 9.** Свойства функций, непрерывных в точке: локальная ограниченность, свойство сохранения знака, арифметические свойства, непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций в естественной области определения.

Следствия из второго замечательного предела. Примеры. Эквивалентные функции. Замена функций эквивалентными при вычислении пределов.

**Семинар.** Асимптоты. Непрерывность функции. Точки разрыва. Эквивалентные функции.

**ДЗ.** [1], §9: 34(4), 35(6,8), 44(2), 45(3), 46(1), 48(1), 58(1); §10: 62(3); §11: §11: 3(5+эскиз графика).

### 5.10.2023

**Лекция 10.** Эквивалентные функции. Замена функций эквивалентными при вычислении пределов.  $O$ -символика (символы Ландау).

Свойства функций непрерывных на отрезке: теоремы Вейерштрасса об ограниченности и достижимости точных граней; теоремы Коши о нулях и о промежуточном значении. Решение уравнений методом половинного деления. Теорема о неподвижной точке.

Мотивация введения производной как скорости изменения функции и углового коэффициента касательной. Определение производной.

**Семинар.** Эквивалентные функции.  $O$ -символика. Непрерывность функции. Точки разрыва. Асимптоты.

ДЗ. [1], §9: 48(2), 49(1), 52(1), 57(1), 58(3); §10: 20(1), 62(2); §11 (найти все асимптоты + построить эскизы графиков): 1(3), 3(3).

### 9.10.2023

**Лекция 11.** Вычисление производной по определению. Примеры. Производные элементарных функций. Таблица производных. Геометрический смысл производной. Уравнения касательной и нормальной прямой. Односторонние производные и касательные. Примеры. Понятие дифференцируемой функции и дифференциала. Теорема о связи производной и дифференцируемости. Геометрический смысл дифференциала. Производная сложной функции. Инвариантность формы 1-го дифференциала.

**Семинар.** Производная. Дифференциал.

ДЗ. [1], §13: 1(3 – найти производную по определению), 17, 33, 39, 60, 146, 167(1), 177(1), 192(1), 209(1), 218(1).

### 12.10.2023

**Лекция 12.** Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически.

Примеры функций экономического анализа: общие, средние и предельные издержки, доход.

Эластичность функции. Свойства эластичности. Примеры. Эластичность функций спроса от дохода.

Производная и дифференциал высших порядков. Функциональная интерпретация знака и абсолютного значения второй производной (выпуклость и кривизна).

Правила вычисления производных и дифференциалов  $n$ -го порядка: линейность, формула Лейбница. Примеры.

**Семинар.** Производная. Производные  $n$ -го порядка.

ДЗ. [1], §13: 176(3), 197(2), 201(5); §14: 3(1), 11; §15: 1(6), 11(4), 14(2), 24(3, 6, 12 – во всех этих номерах найти 10-ю производную в точке  $x = 0$ ).

### 16.10.2023

**Лекция 13.** Понятие точек локального экстремума. Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой функции).

Теорема Ролля.

Теорема Лагранжа и ее следствия (формула конечных приращений, условия постоянства и линейности, о точках разрыва производной, о вычислении односторонних пределов, о доказательстве неравенств).

Теорема Коши о среднем.

**Семинар.** Производная. Производные  $n$ -го порядка.

ДЗ. [1], §15: 24(9, 15), 25(3, 7), 27(7), 28(3), 29(1).

### 23.10.2023

**Лекция 14.** Правило Лопиталю раскрытия неопределенностей. Примеры. Соотношения между ростами степенной, показательной и логарифмической функций.

Многочлен Тейлора и его свойства. Формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Теорема единственности. Частные случаи: формула Маклорена, представление четных и нечетных функций с помощью формулы Маклорена. Примеры представлений основных элементарных функций формулой Маклорена.

**Семинар.** Правило Лопиталю.

ДЗ. [1], §17: 3, 10, 41, 50, 58, 62, 68, 76(1), 78.

## Материал для самостоятельного изучения в период нерабочих дней (2-9.11.2023)

Численное дифференцирование.

Численное решение уравнений методом Ньютона (касательных). Метод секущих.

---

### 2 модуль

#### 6.11.2023

**Лекция 15.** Примеры разложений функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора к нахождению пределов и вычислению значений функций с заданной точностью.

Исследование функций с помощью производных на монотонность.

#### 9.11.2023

**Лекция 16.** Исследование функций с помощью производных: на существование точек локального экстремума (необходимое условие, достаточное условие в терминах изменения знака производной, достаточное условие в терминах старших производных). Нахождение наибольшего и наименьшего значений функций на отрезке.

Понятие выпуклой (вогнутой) дифференцируемой функции. Свойства выпуклых функций. Критерий нестрогой выпуклости и достаточное условие строгой выпуклости дважды дифференцируемых функций.

Неравенство Йенсена, соотношение между средними значениями. Выпуклость надграфика, подграфика выпуклых (вогнутых) функций. Понятие точки перегиба и достаточное условие существования точек перегиба.

Общий план исследования функции с помощью производных и построение эскиза графика.

#### 13.11.2023

**Лекция 17.** Понятие метрического пространства (м.п.). Неравенства Коши-Буняковского, Минковского, треугольника. Метрическое пространство  $\mathbb{R}^n$ . Евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ , понятие нормы элемента  $\mathbb{R}^n$ . Открытые и замкнутые шары в м.п. и  $\mathbb{R}^n$  в разных метриках.

Предел последовательности в м.п. и в  $\mathbb{R}^n$ . Теорема о покоординатной сходимости последовательности в  $\mathbb{R}^n$ . Свойства сходящихся последовательностей в м.п. Фундаментальные последовательности и полнота м.п. Полнота пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Понятия внутренней и граничных точек множества, границы множества, открытого и замкнутого множеств, ограниченного множества, компактного множества, выпуклого и связного множеств. Свойства открытых и замкнутых множеств. Примеры: бюджетное множество.

Понятие функции многих переменных (ФМП). График функции и его визуализация для  $n=2$ . Примеры ФМП: производственные функции (Кобба-Дугласа, Леонтьева), функции полезности. Понятия линий и поверхностей уровня.

**16.11.2023**

**Лекция 18.** Предел ФМП, предел по направлению, повторные пределы функции двух переменных. Примеры. Теорема о пределе функции двух переменных в полярных координатах.

Непрерывность ФМП в точке. Локальные свойства непрерывных ФМП: о сохранении знака, о промежуточном значении, непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте (теоремы Вейерштрасса). Открытые и замкнутые множества, задаваемые системами уравнений и неравенств непрерывных ФМП. Бюджетное множество. Непрерывная функция полезности на бюджетном множестве.

**20.11.2023**

**Лекция 19.** Понятие частных производных ФМП, предельный продукт производственной функции по фактору. Дифференцируемость ФМП. Необходимое условие дифференцируемости. Достаточное условие дифференцируемости ФМП. Дифференциал ФМП и его применение к приближенным вычислениям. Инвариантность формы 1-го дифференциала ФМП. Дифференцируемость сложной ФМП. Примеры.

Формула конечных приращений Лагранжа для ФМП.

Понятие касательной плоскости и нормальной прямой к поверхности уровня. Уравнения касательной плоскости и нормальной прямой. Геометрический смысл дифференциала.

**23.11.2023**

**Лекция 20.** Производная ФМП по направлению. Градиент. Основные свойства градиента.

Примеры применения градиента: нахождения соотношения изменений факторов для достижения наибольшего роста выпуска продукции, приближенное нахождение точек локального экстремума методом градиентного спуска.

Частные производные и дифференциалы высших порядков ФМП. Теорема о равенстве смешанных производных.

**27.11.2023**

**Лекция 21.** Общий вид дифференциала  $m$ -го порядка ФМП  $n$  переменных. Дифференциал 2-го порядка как квадратичная форма.

Формула Тейлора для ФМП. Теорема единственности представления ФМП формулой Тейлора. Примеры.

Необходимое условие существования локального экстремума дифференцируемой ФМП. Понятие стационарной точки ФМП. Понятие седловой точки ФМП. Сведения из теории квадратичных форм (определенность квадратичных форм).

**30.11.2023**

**Лекция 22.** Сведения из теории квадратичных форм (определенность квадратичных форм, критерий Сильвестра). Достаточное условие существования локального экстремума ФМП. Примеры.

Задачи на локальный экстремум: аппроксимация и метод наименьших квадратов, задача об оптимальном размещении объекта (дискретный случай), метод центра тяжести.

**4.12.2023**

**Лекция 23.** Отображения из  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}^m$ , векторная функция. Непрерывное отображение. Дифференцируемое отображение. Понятие производной Фреше и матрицы Якоби дифференцируемого отображения. Примеры.

Неявная функция, задаваемая одним уравнением. Теорема о существовании, единственности и дифференцируемости неявной функции.

#### **7.12.2023**

**Лекция 24.** Примеры исследования на экстремум неявных функций. Неявные производственные функции. Неявная векторная функция (отображение), задаваемая системой уравнений. Теорема о существовании, единственности и дифференцируемости неявной векторной функции. Примеры. Вычисление матрицы Якоби отображения, заданного неявно.

#### **11.12.2023**

**Лекция 25.** Понятие регулярного отображения. Теорема о локальном существовании обратного отображения и матрице Якоби обратного отображения. Выделение главной части в обратном отображении. Примеры.

Приближенные методы решения нелинейных систем: метод Ньютона. Примеры.

Приближенное нахождение стационарных точек ФМП методом Ньютона. Примеры.

#### **14.12.2023**

**Лекция 26.** Выпуклые и вогнутые ФМП: определения и свойства, критерий выпуклости (вогнутости) для непрерывно дифференцируемых функций, критерий выпуклости (вогнутости) для дважды непрерывно дифференцируемых функций. Примеры.

#### **18.12.2023**

**Лекции 27.** Условия функциональной зависимости и независимости системы числовых функций. Примеры.

Повторение материала 1-го семестра.

---

### 3 модуль

#### **15.01.2024**

**Лекции 28.** Задача на условный экстремум для функции многих переменных: определение точки условного экстремума функции многих переменных при наличии связей. Метод подстановки решения задачи на условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Понятие функции Лагранжа. Необходимое условие существования условного экстремума для дифференцируемой функции и дифференцируемых функций уравнений связи (геометрическая интерпретация доказательства). Достаточное условие существования условного экстремума для дифференцируемой функции и дифференцируемых функций уравнений связи (без доказательства). Условия связи дифференциалов.

#### **22.01.2024**

**Лекция 29.** Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на компакте. Метод параметризации границ. Частные случаи: линейные функции и/или ограничения, выпуклые функции. Примеры.

#### **29.01.2024**

**Лекция 30.** Задача на безусловный и условный экстремум для функции многих переменных с параметрами. Теоремы об огибающей.

Некоторые приложения задачи на условный экстремум: аналитические свойства косвенной функции полезности, экономическая интерпретация множителей Лагранжа и понятие теневой цены.

#### **5.02.2024**

**Лекция 31.** Задача на условный экстремум с ограничениями-неравенствами. Условия Куна – Таккера.

Понятие первообразной функции. Совместные свойства функции и ее первообразной. Свойства неопределенного интеграла.

#### **12.02.2024**

**Лекция 32.** Замена переменной (подстановка, внесение под знак дифференциала) в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Некоторые сведения из теории многочленов и рациональных функций. Понятие простых дробей. Разложение правильной рациональной дроби в сумму простых дробей.

#### **19.02.2024**

**Лекция 33.** Интегрирование рациональных дробей.

Понятие рационализируемого интеграла. Рациональные функции многих переменных и их свойства.

Интегрирование рационально-тригонометрических функций. Частные случаи интегрирования рационально-тригонометрических функций.

Интегрирование некоторых иррациональностей: интегралы от рациональных функций дробно-линейных иррациональностей.

Интегрирование некоторых иррациональностей: интегралы от рациональных функций квадратичных иррациональностей.

#### **26.02.2024**

**Лекция 34.** Интегралы от дифференциального бинома.

Мотивация введения определенного интеграла: вычисление объема выполненной работы по производительности.

Понятие определенного интеграла: разбиение, мелкость разбиения, выборка, интегральная сумма. Необходимое условие интегрируемости функции. Функция Дирихле. Суммы Дарбу и их свойства. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу.

Понятие равномерной непрерывности функции на множестве. Модуль непрерывности. Теорема Кантора. Примеры.

#### **4.03.2024**

**Лекция 35.** Интегрируемость непрерывных и монотонных функций. Вычисление некоторых интегралов по определению.

Понятие множеству меры нуль по Лебегу. Критерий интегрируемости Лебега. Примеры.

Свойства определенных интегралов.

#### **11.03.2024**

**Лекция 36.** Понятие и свойства среднего значения функции. Примеры средних.



Интеграл с переменным верхним пределом: определение и свойства. Общий вид первообразной непрерывной функции. Формула Ньютона-Лейбница. Дифференцирование интеграла с функциональными верхним и нижним пределами.

Замена переменной в определенном интеграле. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Интегралы от четной и нечетной функций по симметричному промежутку интегрирования.

### **18.03.2024**

**Лекция 37.** Интеграл от периодической функции. Примеры.

Применения определенного интеграла в теории вероятностей.

Задача об оптимальной размещении (линейный случай): медианное решение и метод центра масс.

Понятие квадратуемой плоской фигуры и ее площади. Нахождение площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла. Примеры нахождения площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла (кривая Лоренца и коэффициент Джини).

### **Разделы для самостоятельного изучения (по пособию**

<https://drive.google.com/file/d/1mLSA-25wWZhwrXk7zOFFENc4seTiMfDG/view?usp=sharing> )

1. Численное интегрирование (раздел 3.8)
2. Понятие кубического тела и его объем. Объем тел вращения (с.207–212).
3. Длина кривой (с. 214–217).

### **8.04.2024**

**Лекция 38.** Несобственные интегралы (НИ). Понятие НИ I-го и II-го родов. НИ в смысле главного значения. Примеры. Эталонные НИ. Свойства НИ. Критерии и признаки сходимости НИ от неотрицательных функций: критерий ограниченности, признак сравнения, признак сравнения в предельной форме.

### **15.04.2024**

**Лекция 39.** Критерий Коши сходимости НИ и его отрицание. Абсолютно и условно сходящиеся НИ. Примеры.

Кратные интегралы. Мотивация введения кратного интеграла: вычисление урожая, собранного с поля. Понятие измеримого множества и его меры в  $\mathbb{R}^n$  (меры Жордана), свойства меры Жордана. Понятие множества меры нуль. Критерий измеримости множества.

Понятие кратного интеграла по измеримому множеству (разбиение множества, мелкость разбиения, выборка точек в разбиении, интегральная сумма).

### **22.04.2024**

**Лекция 40.** Критерии интегрируемости (в терминах сумм Дарбу и меры нуль по Лебегу). Классы интегрируемых функций. Свойства кратных интегралов. Вычисления кратных интегралов с помощью повторных в параллелепипеде (теорема Фубини). Вычисления кратных интегралов с помощью повторных по элементарным множествам. Примеры.

**29.04.2024**

**Лекция 41.** Замена переменных в кратном интеграле: гладкие отображения, геометрический смысл модуля якобиана гладкого отображения. Формула замены переменных в кратном интеграле. Примеры. Частные случаи замены переменных в кратном интеграле: переход к полярным координатам в двойном интеграле, переход к цилиндрическим координатам в тройном интеграле. Примеры.

Приложения кратных интегралов: вычисления масс, центров масс, вероятностей и других интегральных характеристик.

**13.05.2024**

**Лекция 42.** Приложения кратных интегралов: задача об оптимальном размещении в дискретном и непрерывном случаях.

Несобственные кратные интегралы. Понятие исчерпывающей последовательности и несобственного интеграла от неотрицательной функции. Теорема о существовании и корректности определения несобственного интеграла от неотрицательной функции. Примеры. Гауссов интеграл. Несобственные кратные интегралы от знакопеременных функций.

Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность и дифференцируемость собственных интегралов, зависящих от параметра. Формула Лейбница.