Лотфи Заде – отец нечетких множеств и нечеткой логики (к 100-летию со дня рождения)

А.Е. Лепский

семинар «Экспертные оценки и анализ данных»,
семинар МЦАВР

13 января 2021 г

Некоторые биографические сведения

- родился в 1921 году в Баку. Отец – иранский журналист и коммерсант, мать – врач из Одессы.
- несколько лет учился в русской школе. Поэтому хорошо знал русский язык;
- в 1931 году семья переехала в Тегеран, где он уже учился в американском колледже, затем – на электротехническом фак-те Тегеранского университета;

Некоторые биографические сведения

- в 1944 году поехал в США и поступил в магистратуру MIT на спец. инженер-электрик;
- в 1946 году – в аспирантуру Колумбийского университета;
- в 1949 году защитил PhD в Колумбийском университете и остался там же работать;
- с 1959 года и до конца жизни работал в Калифорнийском университете (Беркли);
- умер в Беркли 2017 году, похоронен в Баку (за месяц до кончины сам обратился с письмом к президенту И.Алиеву с просьбой похоронить его в Баку).

Сам он он себе говорил так: «Я – дитя американской, российской, иранской, азербайджанской культур, их странного и удивительного сочетания. И чувствую себя своим в каждой из них».

Семья Л.Заде

сын Норман, жена Фэй, дочь Стелла

Научный вклад до 1965 года

- 1949 – разработка частотного анализа сетей, зависящих от времени
- 1950 – расширенная Винеровская теория предсказания (совм. с J.R. Ragazzini)
- 1952 – разработка подхода на основе z-преобразований для анализа дискретных систем (совм. с J.R. Ragazzini)
- 1953 – разработка теории нелинейных фильтров
- 1956 – формулировка проблемы идентификации систем
- 1963 – разработка подхода к анализу линейных систем на основе пространства состояний (совм. с C.A. Desoer)

Zadeh L., Desoer C. Linear System Theory: The State Space Approach. – McGraw-Hill, 1963. [Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем (Метод пространства состояний). – М: Наука, 1970, 704 с.]

Статья «Fuzzy sets»

В 1965 г. опубликована работа

Zadeh L.A. Fuzzy sets// Information and Control, 1965, 8, pp.338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

В настоящее время (янв. 2021) эта статья имеет более **50 тыс. ссылок** в Scopus.

Практически одновременно в СССР выходит статья

Заде Л.А. Тени нечетких множеств// Пробл. передачи информ., 1966, 2(1), с.37–44. http://mi.mathnet.ru/rus/ppi/v2/i1/p37

Первый в мире доклад по теории НМ Л. Заде сделал в СССР на совещание по автоматическому управлению (технической кибернетике) в сентябре 1965 года на теплоходе «Адмирал Нахимов».

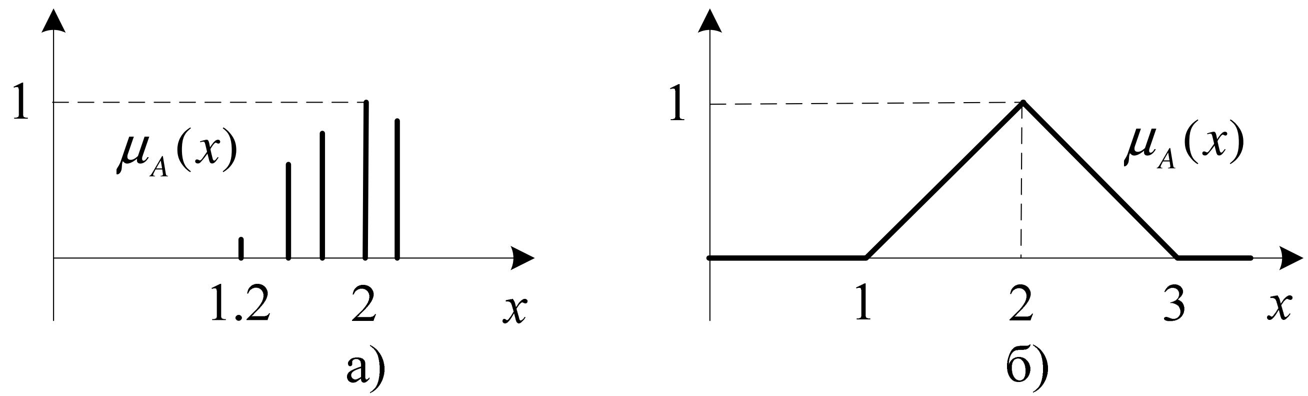
Понятие нечеткого множества (НМ)

Пусть X – универсальное множество. Нечеткое множество $A \subseteq X$ задаётся с помощью *функции принадлежности* $\mu_A : X \to U$. Для четкого (неразмытого) множества A: $\mu_A(x) = \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A \end{cases}$ – характеристическая функция множества A.

Пример. Высказыванию «$x \approx 2$» («x приближенно равно 2») можно поставить в соответствие НМ чисел A близких по значению к 2:

$$A = \{(x_i \mid \mu_A(x_i)) : i = 1, 2, ...\} = \{(1.2 \mid 0.1), (1.5 \mid 0.6), (1.7 \mid 0.8), (2 \mid 1), ...\}$$

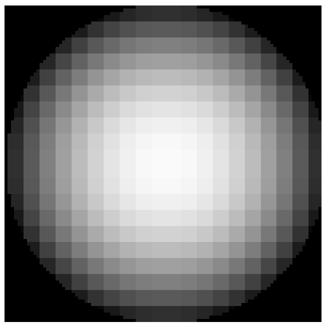
в дискретном случае или в непрерывном случае – $\mu_A(x) = \max\{0, 1 - |x - 2|\}$.



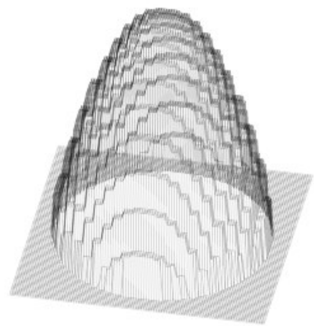
Природа нечеткости

- **Эпистемологическая точка зрения:** нечеткость отражает степень нашего незнания о принадлежности элемента множеству. Примеры: экспертные оценки, которые отражают степень незнания, неуверенности эксперта в своей оценке;
- **Онтологическая точка зрения**: НМ существуют независимо от нашего знания об объектах или явлениях, которые описываются с помощью таких множеств. Примеры: качественные понятия: «большой», «высокий», «яркий», «сильный» и т.д.

Пример. Оцифрованное изображения, матрица значений яркости изображения, график функции яркости. Значения функции яркости характеризуют степень истинности высказывания, что данный пиксель принадлежит кругу.



	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	20
	0	0	0	0	0	20	20
	0	0	0	11	11	20	20
	0	11	11	11	11	20	20
	15	26	26	26	26	35	35
	15	26	26	26	26	35	35
	15	26	26	26	26	35	35
	15	26	26	26	26	35	35
	28	39	39	39	39	48	48
	28	39	39	39	39	48	...



Алгебраические операции над НМ

1) $A = B$, если $\mu_A(x) = \mu_B(x)\ \ \forall x \in X$;

2) $A \subseteq B$, если $\mu_A(x) \le \mu_B(x)\ \ \forall x \in X$;

3) $C = A \cup B$, если $\mu_C(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\ \ \forall x \in X$;

4) $C = A \cap B$, если $\mu_C(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}\ \ \forall x \in X$;

5) $C = A + B$, если $\mu_C(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x)\ \ \forall x \in X$;

6) $C = A \cdot B$, если $\mu_C(x) = \mu_A(x)\mu_B(x)\ \ \forall x \in X$;

7) $C = \neg B$, если $\mu_C(x) = 1 - \mu_B(x)\ \ \forall x \in X$ (если $U = [0,1]$).

Свойства операций над НМ

Свойства	$(\cap,\cup)$	$(\cdot,+)$
1. Коммутативность	$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A$	$A+B=B+A,\ A\cdot B=B\cdot A$
2. Ассоциативность	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$	$A+(B+C)=(A+B)+C$, $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
3. Дистрибутивность	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cdot(B+C)\neq(A\cdot B)+(A\cdot C)$, $A+(B\cdot C)\neq(A+B)\cdot(A+C)$
4. Идемпотентность	$A\cup A=A,\ A\cap A=A$	$A+A\neq A,\ A\cdot A\neq A$
	$A\cup X=X,\ A\cap X=A$, $A\cup\varnothing=A,\ A\cap\varnothing=\varnothing$	$A+X=X,\ A\cdot X=A$, $A+\varnothing=A,\ A\cdot\varnothing=\varnothing$

Операции с дополнением:

1) $A\cup\neg A\neq X$ (закон исключенного третьего) и $A\cap\neg A\neq\varnothing$ (закон противоречия).
2) закон инволюции $\neg(\neg A)=A$
3) закон де Моргана $\neg(A\cup B)=(\neg A)\cap(\neg B),\ \neg(A\cap B)=(\neg A)\cup(\neg B)$.

Направления исследований в 1970–1990 гг.

– принятие решений с нечеткими данными: Bellman R.E., Zadeh L.A. Decision making in a fuzzy environment// Management Science, 1970, 17: 141–164.

– формальная модель лингвистической переменной: Zadeh L.A. The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning. Parts 1 and 2// Information Sciences. – 1975. – Vol. 8. – P. 199–249, 301–357.

– идеи плюрализма и локальности в логике: Bellman R., Zadeh L.A. Local and Fuzzy Logics// Modern Uses of Multiple-Valued Logics / Ed. by J.M. Dunn and G. Epstein. – Dordrecht: D. Reidel, 1977. – P. 105–165.

– теория возможности: Zadeh L.A. Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – Vol. 1. – P. 3–28.

Направления исследований в 1970–1990 гг.

– теория приближенных рассуждений: Zadeh L.A. A Theory of Approximate Reasoning// Machine Intelligence/ Ed. by J. Hayes, D. Michie and L.I. Mikulich. – New York: Halstead Press, 1979. – P. 149–194.

– концепция мягких вычислений: Zadeh L.A. Fuzzy Logic, Neural Network and Soft Computing// Communications of the ACM. – 1994. – Vol. 37. – № 3. – P. 77–84.

– концепция вычислений со словами: Zadeh L.A. Fuzzy Logic = Computing With Words// IEEE Transactions on Fuzzy Systems. – 1996. – Vol. 4. – P. 103–111.

– теория грануляции нечеткой информации Zadeh L.A. Toward a Theory of Fuzzy Information Granulation and its Centrality in Human Reasoning and Fuzzy Logic// Fuzzy Sets and Systems. – 1997. – Vol. 90. – P. 111–127.

Тарасов В.Б. Лотфи Заде и Россия: страницы биографии и научное наследие// Мягкие измерения и вычисления, 2018, 4 (5), С. 21-25.

Лотфи Заде как популяризатор теории НМ

- До конца 70-х годов теория НМ более популярна на Востоке (СССР, страны восточного блока, Китай, Япония), чем на Западе.

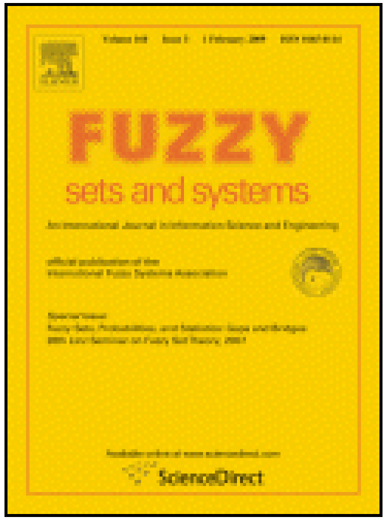
- Признание (и финансирование) пришло после появления промышленных и «потребительский» нечетких контроллеров в начале 80-х годов, прежде всего, в Японии (Hitachi, Cannon, Mitsubishi etc.).

- По признанию Л.Заде в 70-90-е годы он выступал с пленарными докладами на 40-50 конференциях в год, в 2000-е - 25-30.

Лотфи Заде как популяризатор теории НМ

В 1978 году организовал журнал “**Fuzzy sets and systems**” (Elsevier), в которой опубликовал статью

Zadeh L.A. Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – Vol. 1. – P. 3–28.



Лотфи Заде как популяризатор теории НМ

конференция в Репино (1977): Д.А.Поспелов, В.И.Варшавский, Дж.МакКарти, Л.Заде

Лотфи Заде как популяризатор теории НМ

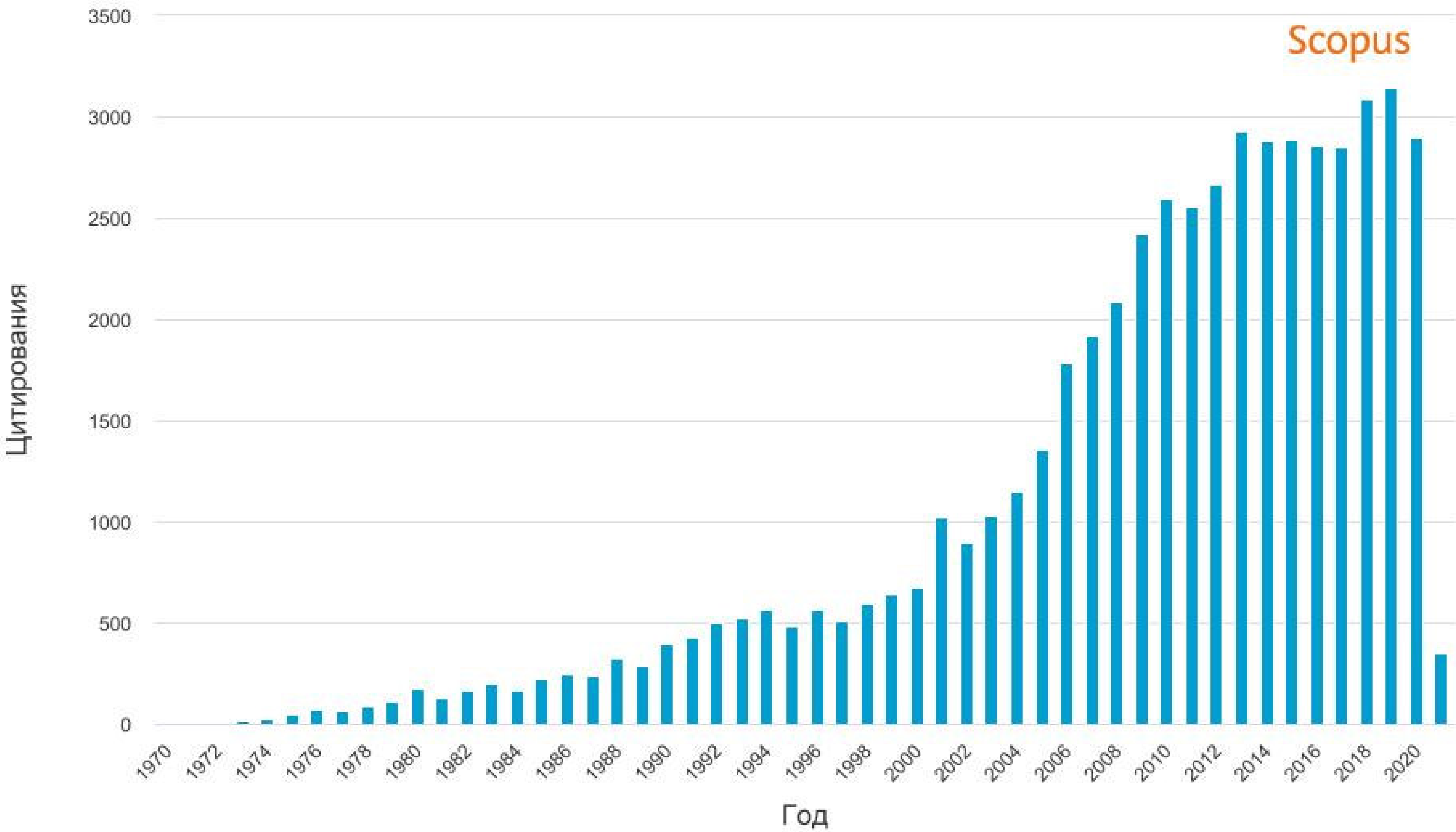
В Университете Беркли, после научного семинара,1977г.(сл. напр.: А,А,ДОРОФЕЮК, Е,И,ДЖУРИ, М,А,АЙЗЕРМАН, Я,З,ЦЫПКИН, Л,ЗАДЕ)

Теория нечетких множеств в цифрах и фактах

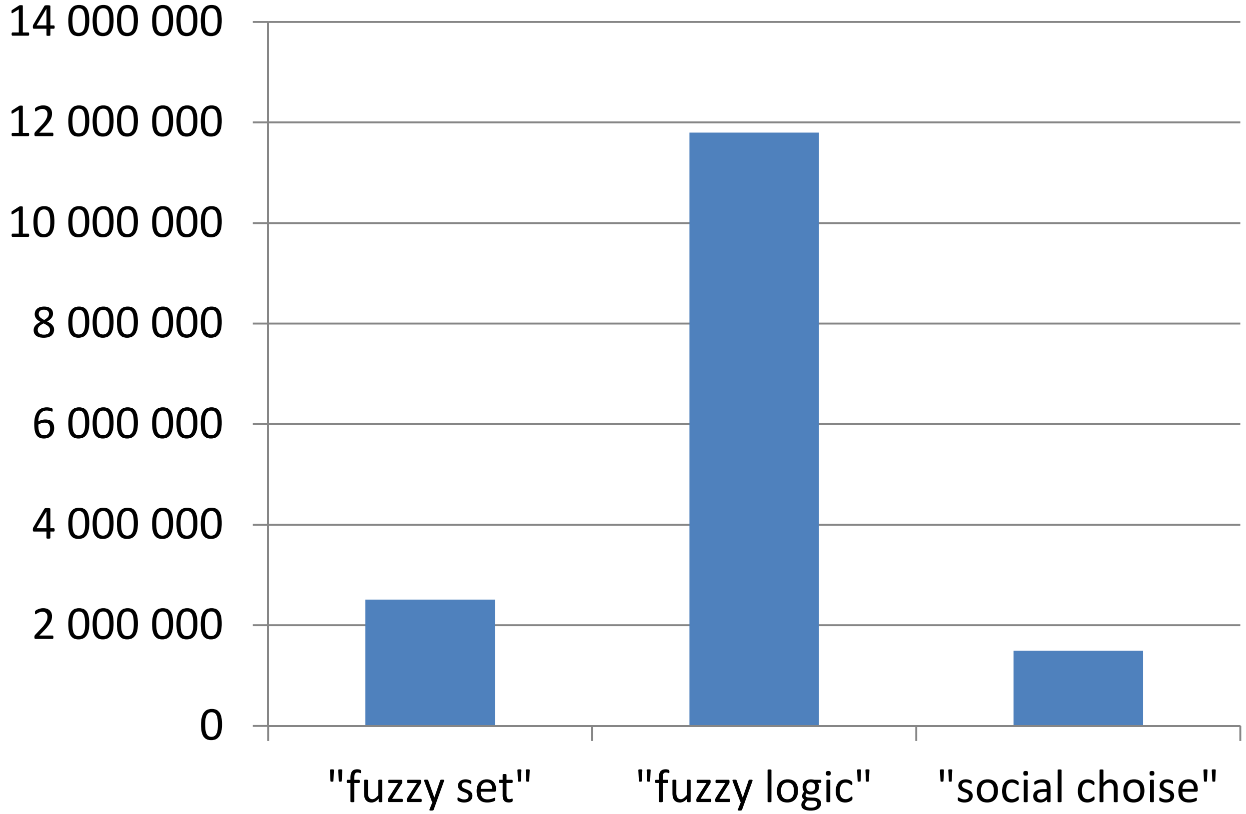
- большое число научных конференций по НМ и «близким» направлениям: IFSA Congress, EUSFLAT conference, NAFIPS conference etc.
- Научные общества:
  - ❑ The International Fuzzy Systems Association (IFSA, 1984)
  - ❑ European society for Fuzzy Logic and technology (EUSFLAT, 1999)
  - ❑ North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS, 1982) etc.
  - ❑ Российской ассоциации нечетких систем и мягких вычислений (1990, инициаторы: Д.А.Поспелов и А.Н.Мелихов)
- Научные журналы: Fuzzy sets and systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems etc

Теория нечетких множеств в цифрах и фактах

Кривая цитирования Л.Заде по Scopus ($\approx$260 работ, h=58, $\approx$110 000 цитирований)

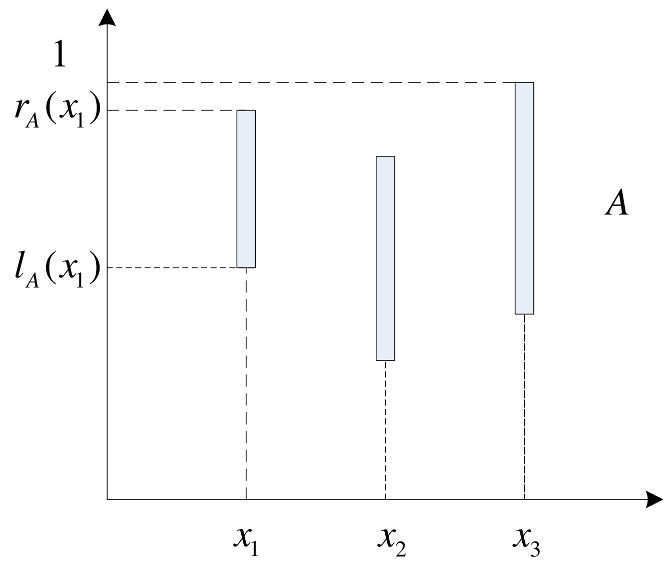


Число ссылок в Google (янв.2021)



Обобщения понятия НМ.
I. L-нечеткие множества (L-fuzzy sets)

A. Интервальнозначные нечеткие множества (IVF, *interval-valued fuzzy sets,* [Zadeh 1975, Grattan-Guiness 1975, Jahn 1975, Sambuc 1975]). IVF A задаётся на X с помощью интервальнозначной функции принадлежности $\mathrm{M}_A : X \to \mathcal{B}[0,1]$, где $\mathcal{B}[0,1]$ – множество замкнутых промежутков на [0,1].



Обобщения понятия НМ.
I. L-нечеткие множества (L-fuzzy sets)

Пусть $\mathrm{M}_A(x) = [l_A(x), r_A(x)]$, $0 \le l_A(x) \le r_A(x) \le 1 \quad \forall x \in X$. Операции:

(IVF-1) $A \cap B = \left\{ \left[\min\{ l_A(x), l_B(x), \min\{ r_A(x), r_B(x) \right] \mid x \in X \right\}$;

(IVF-2) $A \cup B = \left\{ \left[\max\{ l_A(x), l_B(x), \max\{ r_A(x), r_B(x) \right] \mid x \in X \right\}$;

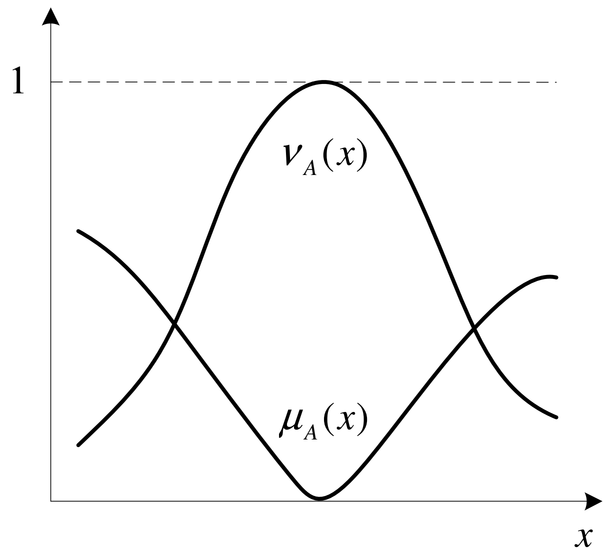
(IVF-3) $\neg A = \left\{ \left[1 - r_A(x), 1 - l_A(x) \right] \mid x \in X \right\}$.

В. Нечеткие множества 2-го типа [Zadeh 1975] – множеств, задаваемые с помощью функций принадлежности вида $\mathrm{M}_A : X \to \mathcal{F}[0,1]$, где $\mathcal{F}[0,1]$ – множество нечетких на [0,1] множеств.

Обобщения понятия НМ.
I. L-нечеткие множества (L-fuzzy sets)

C. Интуиционистские нечеткие множества (intuitionistic fuzzy set, IFS, [Atanasov 1986]). IFS A задаётся на X как

$$A=\{(x,\mu_A(x),\nu_A(x))\mid x\in X\},$$



где $\mu_A : X\to[0,1]$ и $\nu_A : X\to[0,1]$ – функции принадлежности и непринадлежности элемента $x\in X$ множеству $A\subseteq X$ соответственно и $0\le\mu_A(x)+\nu_A(x)\le 1\ \forall x\in X$.

Любое НМ является IFS вида $A=\{(x,\mu_A(x),1-\mu_A(x))\mid x\in X\}$. Операции:

(IFS-1) $\neg A=\{(x,\nu_A(x),\mu_A(x))\mid x\in X\}$;

(IFS-2) $A\cap B=\{(x,\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\max\{\nu_A(x),\nu_B(x)\})\mid x\in X\}$;

(IFS-3) $A\cup B=\{(x,\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\},\min\{\nu_A(x),\nu_B(x)\})\mid x\in X\}$.

Обобщения понятия НМ.
I. L-нечеткие множества (L-fuzzy sets)

Понятия IVF, IFS и др. связаны с заменой множества значений функции принадлежности – интервала [0,1], некоторым абстрактным множеством L с заданной алгебраической структурой. Как правило, L – решетка.

Например, решетка

$L^* = \{(u_1, u_2) \in [0,1]^2 : u_1 + u_2 \le 1\}$ с частичным порядком $(u_1, u_2) \le (v_1, v_2) \Leftrightarrow u_1 \le v_1 \wedge u_2 \ge v_2$ соответствует IFS;

$J = \{[u_1, u_2] \subseteq [0,1] : 0 \le u_1 \le u_2 \le 1\}$ с частичным порядком $(u_1, u_2) \le (v_1, v_2) \Leftrightarrow u_1 \le v_1 \wedge u_2 \le v_2$ – IVF.

Понятие ***L*-нечеткого множества** $(\mu, \nu) : X \to L$ было введено Джозефом Гогеном [Goguen 1967], аспирантом Л. Заде.

Если решетки значений истинности изоморфны, то обобщения НМ будут эквивалентными. В [Klement & Mesiar 2018] показано, что эти и ряд других решеток изоморфны друг другу.

Обобщения понятия НМ

Кроме двумерных решеток рассматриваются решетки и более высокой размерности. Например, в [Cuong & Kreinovich 2013] введены картинные нечеткие множества (picture fuzzy sets), которые соответствуют трехмерной полурешетке $D^* = \{(u_1, u_2, u_3) \in [0,1]^3 : u_1 + u_2 + u_3 \le 1\}$ с частичным порядком $(u_1, u_2, u_3) \le (v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow u_1 \le v_1 \wedge u_2 \le v_2 \wedge u_3 \ge v_3$. Мотивация – различные сценарии голосования: u_1 голосующих поддерживает данного кандидата, u_2 голосует против него, u_3 воздерживается и $1 - u_1 - u_2 - u_3$ не участвуют в голосовании.

II. Нечеткие случайные величины (fuzzy random variable – FRV) были введены в [Kwakernaak 1978]: это случайные величины, значениями которых являются нечеткие числа.

Обобщённые операции над НМ.Т-нормы и конормы

Эти нормы были предложены в [Menger 1942].

Треугольной нормой (t-нормой) называется бинарная операция $T:[0,1]^2 \to [0,1]$, которая удовлетворяет условиям:

(T1) $T(x, y) = T(y, x)$; (T2) $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$;

(T3) $T(x, y) \le T(x, z)$, если $y \le z$; (T4) $T(x,1) = x$.

Примеры: 1) $T_M(x, y) = \min\{x, y\}$; 2) $T_P(x, y) = xy$;

3) $T_L(x, y) = \max\{x + y - 1, 0\}$ (t-норма Лукасевича).

Треугольной конормой (t-конормой) называется бинарная операция $S:[0,1]^2 \to [0,1]$, которая удовлетворяет условиям (T1)-(T3) и

(S4) $S(x,0) = x$.

Примеры: 1) $S_M(x, y) = \max\{x, y\}$; 2) $S_P(x, y) = x + y - xy$;

3) $S_L(x, y) = \min\{x + y, 1\}$ (t-конорма Лукасевича).

Некоторые направления развития теории НМ

- нечеткая регрессия [Tanaka H. 1982, Diamond P. 1988]
- нечеткая оптимизация [Zimmermann H.J. 1976-85]
- многокритериальная задача принятия решений при нечетких данных
- нечеткая кластеризация [Bezdek J.C. 1980, Gustafson D.E. & Kessel W.C. 1978]
- нечеткий логический вывод и нечеткое управление [Mamdani E.H. 1974, Takagi T. & Sugeno M. 1985]
- нечеткие и (нечеткие) реляционные уравнения и их приложения [Sanchez 1976, Buckley J.J. 1990-е]
- нечеткая статистика [Kandel A. 1978, Kruse R. 1987]
- нечеткие графы [Rosenfeld A. 1975]
- нечеткие сети, нечеткие автоматы, нечеткий коллективный выбор и т.д.

Связь теории НМ с другими «теориями неопределенности» . Теория возможностей

Zadeh L.A. *Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility* (1978).

Dubois D., Prade H. *Possibility theory: an approach to computerized processing of uncertainty* (1988, на рус. – 1990).

Меры возможности $\Pi : 2^X \to [0,1]$ и необходимости $\mathrm{N} : 2^X \to [0,1]$

1) $\Pi(\varnothing) = 0,\ \Pi(X) = 1;$

2) $\Pi\left(\bigcup_i A_i\right) = \sup\limits_i \Pi(A_i).$

1) $\mathrm{N}(\varnothing) = 0,\ \mathrm{N}(X) = 1;$

2) $\mathrm{N}\left(\bigcap_i A_i\right) = \inf\limits_i \mathrm{N}(A_i).$

Соотношения:

а) $\mathrm{N}(A) = 1 - \Pi(\overline{A});$

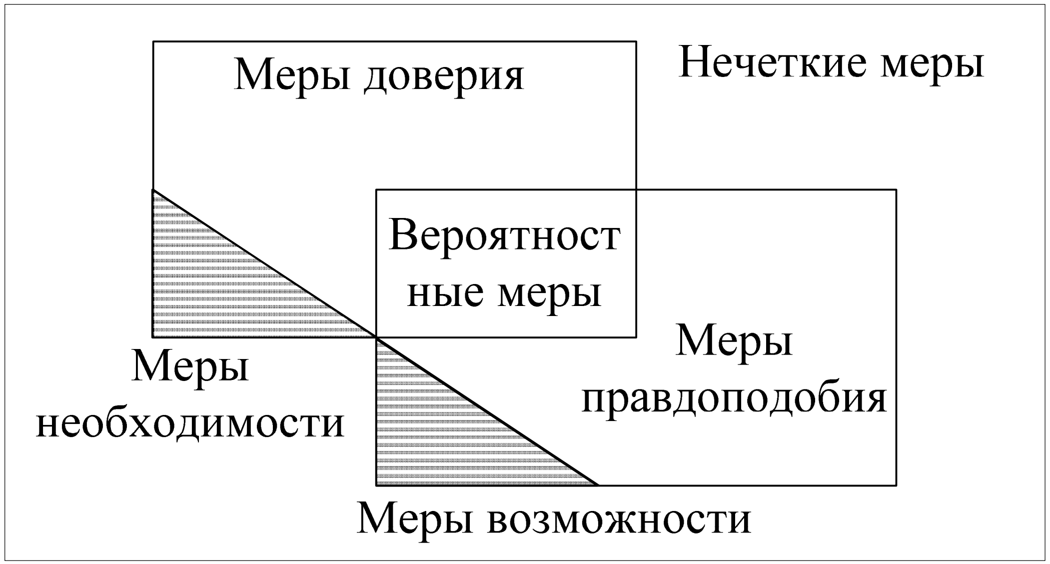
б) $\mathrm{N}(A) \le \Pi(A).$

Связь теории НМ с другими «теориями неопределенности» . Нечеткие меры

Распределение возможностей $\pi : X \to [0,1]$: $\Pi(A) = \sup\limits_{x \in A} \pi(x)$.

В качестве $\pi(x) = \mu_B(x)$ может быть функция принадлежности некоторого нечеткого множества B. Само A также может быть нечетким. В этом случае $\Pi_B(A) = \sup\limits_{x \in A} \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.

Нечеткие меры (Sugeno M. 1974) $g : 2^X \to [0,1]$: 1) $g(\varnothing) = 0$, 2) $g(X) = 1$; 3) $g(A) \le g(B)$, если $A \subseteq B$.



Некоторые источники

- Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976. – 165 с. (первая книга на русском по НМ, сборник статей)
- Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. – М.: Радио и связь, 1982. (предисловие М.А. Айзермана, оригинальное издание A. Kaufmann 1977 г.)
- Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта/ под. ред. Д.А. Поспелова. – М: Наука, 1986.
- Fay L. Zadeh. My life and travels with the father of fuzzy logic. – TSI Press, 1998. — 310 p. (на русском языке: Жизнь и путешествия с отцом нечёткой логики от Фей Заде. Баку: Чашыоглы, 2001)
- Тарасов В.Б**.** Лотфи Заде и Россия: страницы биографии и научное наследие// Мягкие измерения и вычисления, 2018, 4 (5), С. 21-25.
- Klir G.J., Yuan B. Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications. – Prentice Hall PTR, 1995.
- Wang X., Ruan D., Kerre E.E. Mathematics of Fuzziness – Basic Issues. – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.

Место для рекламы